

LEÇONS
D'ALGÈBRE.

—♦♦♦—
PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET C.
rue Racine, 26, près de l'Odéon.
—♦♦♦—

6662812
V41 1518320

LEÇONS D'ALGÈBRE

ENTIÈREMENT CONFORMES

AUX NOUVEAUX PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES,

PAR CHARLES BRIOT,

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur des sciences,
membre de la Société philomatique, répétiteur à l'École polytechnique.



DEUXIÈME PARTIE,

à l'usage des élèves

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ET DES CANDIDATS À L'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE ET À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V^{os} DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIELS DES PONTS ET CHAUSSEES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1855.



TABLE DES MATIÈRES.

Cette table des matières est la reproduction du Programme officiel pour la classe de mathématiques spéciales. (Le même programme a été adopté pour l'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure.)

CHAPITRE I.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

	Pages.
Notions sur les nombres incommensurables.	1
Division des polynômes.	6
Résolution des équations générales du 1 ^{er} degré à plusieurs inconnues. On développera les calculs relatifs au cas de deux équations et à celui de trois équations. On fera connaître la règle générale pour former le dénominateur commun et pour en déduire les numérateurs. — Discussion complète des formules générales propres au cas de deux équations.	7
Lorsque, dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, a tend vers zéro, l'une des racines croît indéfiniment. — Calcul numérique des deux racines quand a est très-petit.	10
Équations réductibles au 2 ^e degré.	10
Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux.	10
Exposants fractionnaires.	14

	Pages
Exposants incommensurables.	19
Exposants négatifs.	20

CHAPITRE II.

DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES EN GÉNÉRAL.

Progressions arithmétiques et géométriques. — Sommation des termes.	25
Ce qu'on appelle série. — Convergence et divergence.	25
Une progression géométrique est convergente, si la raison est plus petite que l'unité; divergente, si la raison est plus grande que l'unité.	26
Les termes d'une série peuvent décroître indéfiniment, sans que la série soit convergente.	27
Une série est convergente lorsque, à partir d'un certain terme, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent est constamment inférieure à un nombre déterminé plus petit que l'unité.	30
Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment, et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.	37

CHAPITRE III.

FORMULE DU BINÔME ET SES APPLICATIONS.

Arrangements, permutations et combinaisons.	44
Développement des puissances entières et positives d'un binôme. — Terme général.	57
Développement de $(a + b\sqrt{-1})^m$	66
Limite vers laquelle tend $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît au delà de toute limite.	68
Sommation des piles de boulets.	75

CHAPITRE IV.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS USAGES.

	Pages.
En formant toutes les puissances d'un nombre quelconque positif, plus grand ou plus petit que 1, on peut reproduire tous les nombres.	83
Propriétés générales des logarithmes.	90
Lorsque des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique.	93
Comment on passe d'un système de logarithmes à un autre système. — Logarithmes népériens. — Logarithmes vulgaires. — Ce qu'on appelle module d'un système de logarithmes. .	94
Usage des logarithmes vulgaires. — Caractéristiques. — Caractéristiques négatives.	97
Un nombre étant donné, trouver son logarithme par le moyen des tables de Callet. — Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient. — Usage des parties proportionnelles.	104
Usage de la règle à calcul.	106
Résolution des équations exponentielles au moyen des logarithmes.	106
Intérêts composés. — Annuités.	107

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

Développement d'une fonction entière $f(x)$ suivant les puissances croissantes de h ; quand on remplace x par $x + h$. —	
Dérivée d'une fonction entière.	108
La dérivée d'une fonction quelconque est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro. . .	110
Dérivée d'une fonction de fonction.	120
Règles pour trouver la dérivée d'une somme, d'un produit,	

	Page.
<u>d'une puissance, d'un quotient de fonctions dont les dérivées sont connues</u>	123
<u>Dérivées des fonctions circulaires directes et inverses.</u> . . .	124
<u>Dérivées de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique.</u>	126
Une fonction est croissante ou décroissante, suivant que sa dérivée est positive ou négative.	130
<u>Deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante.</u>	146
Revenir de la dérivée à la fonction primitive, dans le cas où cette opération peut se faire <i>immédiatement</i>	149
<u>Application de la théorie des dérivées au développement des fonctions $L(1+x)$ et arc tang x en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de x, lorsque cette variable reste comprise entre -1 et $+1$.</u>	152
<u>Calcul des logarithmes au moyen de la série qui donne le logarithme de $n+1$, quand on connaît celui de n. — Calcul des logarithmes népériens. Valeur du module des logarithmes vulgaires. — Calcul des logarithmes vulgaires.</u>	158
<u>Calcul du rapport de la circonférence au diamètre d'après la série arc tang x (1).</u>	162

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Comment varie une fonction entière $f(x)$ quand x varie d'une manière continue entre $-\infty$ et $+\infty$	170
<u>Lorsque deux nombres a et b substitués dans une fonction entière $f(x)$ donnent des résultats de signes contraires, l'équa-</u>	

(1) Partir, par exemple, de l'une des formules $\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3}$;
 $\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } \frac{1}{3} + \text{arc tang } \frac{1}{7}$; $\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{250}$, auxquelles
 conduit aisément le procédé de Machin rapporté par M. Lacroix dans l'introduction du traité des calculs différentiel et intégral.

tion $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre a et b . Toute fonction $f(x)$ qui reste continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b , jouit de cette propriété.	175
Une équation algébrique de degré impair a au moins une racine réelle.	175
Une équation algébrique de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.	176
Toute équation algébrique $f(x) = 0$, à coefficients réels ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a une racine réelle ou imaginaire de la même forme (1).	177
Si a est racine d'une équation algébrique, le premier membre est divisible par $x - a$	178
Une équation algébrique du degré m a toujours m racines réelles ou imaginaires, et elle ne peut en avoir davantage. — Décomposition du premier membre en facteurs du premier degré.	182
Relations entre les coefficients d'une équation algébrique et les racines.	188
Lorsqu'une équation algébrique, dont les coefficients sont réels, a une racine imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, elle a aussi pour racine l'expression conjuguée $a - b\sqrt{-1}$	190
Dans une équation algébrique, complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations. — Conséquence relative au nombre des racines négatives (2).	192
Recherche du produit des facteurs du premier degré communs à deux fonctions entières de x	197
Recherche des racines communes à deux équations dont les premiers membres sont des fonctions entières de l'inconnue.	199
Comment on reconnaît qu'une équation algébrique a des racines égales, et comment alors on ramène sa résolution à	

(1) On ne demandera pas à l'examen la démonstration de ce théorème.

(2) On ne demandera à l'examen que la démonstration de cet énoncé du théorème de Descartes.

	Page.
celle d'autres équations de degré moindre dont les racines sont Inégales.	204
Recherche des racines commensurables d'une équation algébrique à coefficients commensurables.	209

CHAPITRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

Différences des divers ordres.	230
Étant donnés $m+1$ nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$; trouver : 1° l'expression du terme général u_n en fonction du premier terme u_0 et de ses différences successives; 2° l'expression de $\Delta^m u_0$ en fonction des nombres proposés.	234
La différence de l'ordre m d'une fonction entière du degré m est constante, si la différence de la variable est elle-même constante.	238
Connaissant les résultats de la substitution de m nombres entiers consécutifs dans une fonction entière du degré m , on obtient facilement, au moyen des différences, les résultats de la substitution de tous les autres nombres entiers positifs ou négatifs. — Application au cas d'une fonction entière du troisième degré dont on connaît les valeurs correspondantes aux valeurs $-1, 0, +1$, de la variable.	246
Formules d'interpolation.	250
Application de la méthode d'interpolation de Newton à la représentation exacte d'une fonction entière $f(x)$ du degré m dont on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ correspondantes aux valeurs de $x, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + mh$	261
Si la différence h et les quantités $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0$ sont positives, $x_0 + (m-1)h$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$	262

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

Séparation des racines d'une équation algébrique par la substitution de différents nombres à l'inconnue. — Étude spéciale

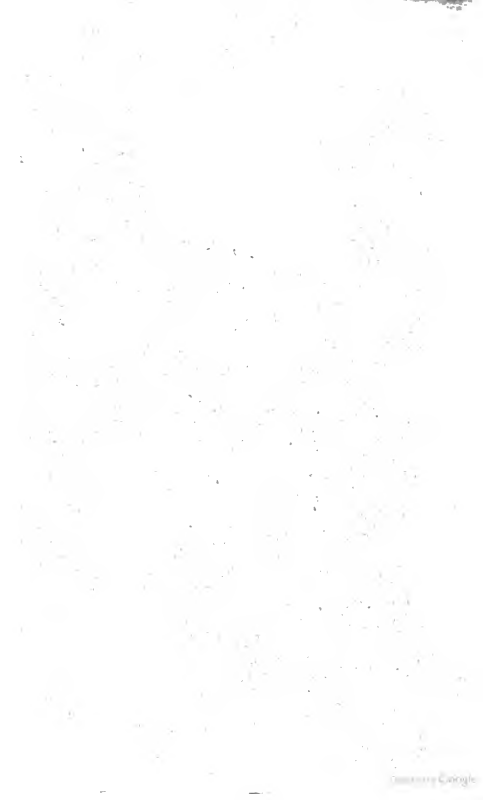
du cas d'une équation du troisième degré. — Substitution de nombres entiers par le moyen des différences. — Substitution de nombres équidistants d'un <i>dixième</i> entre deux nombres entiers consécutifs; de nombres équidistants d'un <i>centième</i> entre deux nombres consécutifs de dixièmes, etc., soit pour séparer les racines, soit pour en approcher. — Ces dernières substitutions s'effectuent au moyen de nouvelles différences, déduites des premières. — Usage des constructions graphiques dans l'application de la méthode précédente.	264
Recherche des racines d'une équation transcendante. Lorsqu'on a substitué des nombres équidistants et assez voisins pour que les différences des résultats puissent être considérées comme égales entre elles à partir d'un certain ordre, on continue l'opération comme s'il s'agissait d'une équation algébrique.	284
Ayant obtenu, avec un certain degré d'approximation, une racine d'une équation algébrique ou transcendante, en approcher davantage par la méthode de Newton. Usage des constructions graphiques pour l'application de cette méthode.	290

CHAPITRE IX.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

Toute fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est décomposable en une partie entière et en diverses fractions simples. — La décomposition ne peut se faire que d'une seule manière. — Moyens de l'effectuer quand on connaît les facteurs binômes qui divisent le dénominateur $f(x)$.	299
APPENDICE. Résolution de deux équations du second degré à deux inconnues (1).	317

(1) Cette question fait partie du programme de géométrie analytique.



LEÇONS D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

NOTIONS SUR LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

Definition.

1. Lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, par exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans l'unité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, cette grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de l'unité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il arrive quelquefois que la grandeur et l'unité n'admettent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de grandeur, quelque petite qu'elle soit, contenue exactement dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas,

on dit que la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est impossible de la mesurer exactement, on se borne à une évaluation approximative. Imaginons l'unité partagée en un grand nombre de parties égales, par exemple, en mille parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesurer contient de ces parties; elle en contient, je suppose, 728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la grandeur à mesurer étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus petite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou l'autre de ces deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième.

Si l'on avait partagé l'unité en un million de parties égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur avec une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un *nombre incommensurable*.

2. Les racines des quantités qui ne sont pas puissances parfaites, donnent aussi naissance à des nombres incommensurables. Appelons A un nombre entier non puissance n^{e} parfaite, et plus généralement une fraction ordinaire irréductible dont les termes ne sont pas des puissances n^{e} parfaites; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ qui, élevé à la n^{e} puissance, reproduise exactement A. En effet, la n^{e} puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire les deux nombres a et b premiers entre eux, les deux puissances a^n et b^n seront aussi premières entre elles et la fraction $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fraction

irréductible ne peut être égale à un nombre entier A . Elle ne peut pas non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement; la fraction proposée aurait ainsi ses deux termes puissances parfaites, qui est contraire à l'hypothèse.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A . Écrivons en effet la quantité proposée A sous la forme

$$\frac{A \times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre entier dont la n^{e} puissance soit contenue dans $A \times b^n$; la quantité $A \times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$, la quantité $\frac{A \times b^n}{b^n}$ ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A , est ce que l'on appelle la racine approchée de A ; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$ représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres dont les n^{e} puissances sont inférieures à A ; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A , et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue plus petite que toute quantité donnée. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables, il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée qui en est la limite commune; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$ (*).

3. On a vu, en géométrie, plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi, on a démontré que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité: elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité; mais le nombre incommensurable qui mesure la circonférence ne peut, comme le précédent, être obtenu par des extractions de racines; on le désigne par la lettre π .

(*) Pour plus de détails sur les racines carrées et les racines cubiques, voir mon Arithmétique, 2^e édition, n^{os} 182, 183 et 197.

Calcul des nombres incommensurables.

4. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étant autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires ; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur infiniment petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde ; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut ; donc elles comprennent une grandeur déterminée qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction. Il en est de même de la soustraction : si l'on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès, ou réciproquement le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut ; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables que représentent les deux nombres incommensurables proposés.

Multiplication. Soit à faire le produit de deux nombres incommensurables ; par exemple $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$. Si l'on prend

les deux nombres fractionnaires approchés par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second ; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut ; donc ils comprennent une grandeur qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; car le produit des nombres fractionnaires approchés ne change pas. Ce théorème fondamental étendu aux nombres incommensurables, toutes ses conséquences le sont par là même ; ainsi on peut grouper deux facteurs en un seul, décomposer au contraire un facteur en deux, etc.

Division. Si l'on prend le dividende par défaut, le diviseur par excès, ou réciproquement le dividende par excès, le diviseur par défaut, le premier quotient sera plus petit que le second, et comme leur différence est infiniment petite, ils comprennent entre eux une grandeur déterminée qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Les propriétés des fractions algébriques (voir la 1^{re} partie, n^{os} 72 et 75), et en général toutes les règles de calcul algébrique, subsistent évidemment quand les lettres désignent des nombres incommensurables.

DIVISION DES POLYNÔMES.

Cette question a été traitée avec tous les développements nécessaires dans la première partie de l'algèbre du n^o 65 au n^o 70. Il est inutile d'y revenir.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU 1^{er} DEGRÉ
A PLUSIEURS INCONNUES.

On développera les calculs relatifs au cas de deux équations et à celui de trois équations. On fera connaître la règle générale pour former le dénominateur commun et pour en déduire les numérateurs. — Discussion complète des formules propres au cas de deux équations.

5. Nous avons exposé dans la première partie de l'algèbre (nos 117, 118, 119) la résolution de deux équations générales du premier degré à deux inconnues, et nous avons discuté en détail (n° 120) les formules trouvées. Nous avons aussi opéré (nos 121, 122) la résolution de trois équations générales à trois inconnues, indiqué la loi de formation du dénominateur (n° 123), et discuté sommairement les formules trouvées (n° 124). Il nous reste à montrer comment on obtient les formules relatives à n équations générales du premier degré à n inconnues.

Un système de n équations générales du premier degré à n inconnues peut être mise sous la forme suivante :

[illegible]

On appelle *fonction alternée* de plusieurs lettres une expression qui change de signe en conservant la même valeur numérique, quand on permute deux lettres. Le dénominateur

$$ab' - ba',$$

qui se rapporte à deux équations, est une fonction alternée des deux lettres a et b ; car si on permute ces deux lettres, il devient $ba' - ab'$, et change de signe en conservant la même valeur numérique. De même le dénominateur trouvé pour trois équations

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

est une fonction alternée des trois lettres a, b, c ; car si on permute deux quelconques de ces lettres, le polynôme change de signe en conservant la même valeur numérique.

Les termes d'une fonction alternée se déduisent facilement du premier, en permutant les lettres deux à deux de toutes les manières possibles, et changeant le signe à chaque permutation. En effet, si le polynôme contient le terme $ab'c''$, il doit contenir aussi le terme $-ac'b''$ obtenu en permutant les deux lettres b et c , puisque le polynôme change de signe par la permutation. De même le terme $-ac'b''$ donne le terme $+ca'b''$ par la permutation des deux lettres a et c ; etc.

Remarquons que lorsque dans une fonction alternée on remplace une lettre par une autre, sans remplacer celle-ci par la première, l'expression devient nulle. Remplaçons, par exemple, a par b sans remplacer b par a ; à un terme quelconque $ab'c''$ correspond, comme nous l'avons dit, un terme $-ba'c''$ obtenu en permutant les lettres a et b ; or, si a est remplacé par b , ces termes deviennent égaux et de signes contraires; ainsi les termes du polynôme se détruisent deux à deux.

Considérons maintenant le polynôme alterné formé avec les n lettres $a, b, c, \dots, g, h$, et ayant pour premier terme

$$ab'c'' \dots \dots h^{(n-1)}$$

et représentons par D ce polynôme. Tous les termes contenant la lettre a une fois et seulement une fois, nous pourrions ordonner ce polynôme par rapport à $a, a', \dots, a^{(n-1)}$, et l'écrire sous la forme

$$D = Aa + A'a' + A''a'' + \dots + A^{(n-1)}a^{(n-1)},$$

les quantités $A, A', \dots$ ne contenant plus la lettre a , mais les autres lettres $b, c, \dots, h$. Nous savons que si l'on remplace la lettre a par l'une des autres lettres, le polynôme devient nul; on a donc les relations

$$Ab + A'b' + A''b'' + \dots + A^{(n-1)}b^{(n-1)} = 0,$$

$$Ac + A'c' + A''c'' \dots + A^{(n-1)}c^{(n-1)} = 0,$$

• • • • •

• • • • •

$$A h + A' h' + A'' h'' \dots + A^{(n-1)} h^{(n-1)} = 0.$$

Cela posé, multiplions les équations proposées, la première par A , la seconde par A' , la troisième par A'' , ..., la dernière par $A^{(n-1)}$ et ajoutons : le coefficient de x sera le polynôme D ; les coefficients des autres inconnues, d'après les relations précédentes, seront nuls; on aura donc

$$Dx = Ak + A'k' + A''k'' \dots + A^{(n-1)}k^{(n-1)},$$

d'où

$$x = \frac{\Lambda k + \Lambda' k' + \Lambda'' k'' \dots + \Lambda^{(n-1)} k^{(n-1)}}{\Lambda a + \Lambda' a' + \Lambda'' a'' \dots + \Lambda^{(n-1)} a^{(n-1)}}.$$

Ce mode de résolution s'applique à l'une quelconque des inconnues. Ainsi le dénominateur commun, ou le *déterminant*, est le polynôme alterné formé avec les lettres

$a, b, c, \dots, g, h$, polynôme que nous avons représenté par D ; le numérateur de chaque inconnue s'obtient en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de cette inconnue par les seconds membres.

La manière de former le dénominateur commun sera expliquée plus tard avec détail à l'article des permutations.

LORSQUE DANS L'ÉQUATION $ax^2 + bx + c = 0$, a TEND VERS ZÉRO, L'UNE DES RACINES CROÎT INDÉFINIMENT. CALCUL NUMÉRIQUE DES DEUX RACINES QUAND a EST TRÈS-PETIT.

Voyez la première partie, n° 170 et 171.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU 2^e DEGRÉ.

Voyez la première partie, n° 175 et 177.

CALCUL DES VALEURS ARITHMÉTIQUES DES RADICAUX.

6. On appelle en général racine n^e d'un nombre positif a , un nombre positif, commensurable ou incommensurable, qui, élevé à la n^e puissance, reproduit le nombre proposé. C'est là ce qu'on entend par *valeur arithmétique* d'un radical; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée; dans ce cas, on sous-entend l'indice 2.

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous allons poser quelques lemmes sur les puissances.

7. LEMME I. *On élève un produit à une certaine puissance en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

En effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \dots = a^n b^n c^n.$$

LEMME II. *On élève une fraction à une certaine puissance en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

En effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots = \frac{a^n}{b^n}.$$

LEMME III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à l'élever à une puissance ayant pour indice le produit des indices.*

En effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \dots = a^{mn}.$$

COROLLAIRE I. *On élève un monôme à une certaine puissance en élevant son coefficient à cette puissance et multipliant tous les exposants par l'indice de la puissance.*

Soit à élever à la n^{e} puissance le monôme $5a^2b^3c$. En vertu des lemmes I et III, on aura

$$(5a^2b^3c)^n = 5^n a^{2n} b^{3n} c^n.$$

COROLLAIRE II. Un monôme est une puissance n^{e} parfaite, lorsque son coefficient est une puissance n^{e} parfaite et que tous ses exposants sont divisibles par n . Dans ce cas, on obtient la racine n^{e} du monôme proposé, en extrayant la racine n^{e} de son coefficient et divisant par n tous ses exposants.

Venons maintenant au calcul des radicaux.

8. THÉOREME I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice égale la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^{e} puissance, ce qui se fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité abc ; donc ce premier membre est la racine n^{e} de abc .

9. THÉOREME II. *Le quotient de deux radicaux de même indice égale la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^{e} puissance, ce qui se fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

10. THÉOREME III. *On élève un radical à une certaine puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On a, en effet, en vertu du théorème I,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots = \sqrt[n]{a^m}.$$

11. THÉOREME IV. *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m , on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n , on obtient a ; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn . Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn , reproduit a ; donc c'est la racine mn^{e} de a .

12. THÉORÈME V. *On ne change pas la valeur d'un radical quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.*

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m , on obtient un second radical

$$\sqrt[p]{a^{mp}}$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent, le second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

COROLLAIRE I. *On simplifie un radical en divisant l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur.* Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{30}} = \sqrt[5]{a^3}.$$

COROLLAIRE II. On réduit plusieurs radicaux au même indice en prenant pour indice commun le produit des indices, ou plus simplement leur plus petit multiple. Cette réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou diviser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}. \\ \sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b} &= \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[12]{a^3 b^2}.\end{aligned}$$

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

Définition.

13. On a vu que, pour extraire la racine d'une quantité affectée d'un certain exposant, il suffit de diviser l'exposant par l'indice de la racine, lorsque cette division est possible. Ainsi

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^3.$$

Si, par extension, on applique la même règle dans le cas où l'exposant n'est pas divisible par l'indice de la racine, on obtient un exposant fractionnaire. Soit le radical $\sqrt[5]{a^7}$; l'exposant 7 n'étant pas divisible par l'indice 5, il est impossible d'extraire la racine; mais si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole $a^{\frac{7}{5}}$, que l'on adoptera comme représentant le radical proposé.

En général, on est convenu de représenter un radical quelconque $\sqrt[n]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. Le dénominateur de l'exposant fractionnaire remplace ainsi le signe $\sqrt{}$, et les expressions irrationnelles prennent la forme d'expressions rationnelles.

D'après cette convention, les radicaux

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a} & \text{s'écriront } a^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{a} & a^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{a^2} & a^{\frac{2}{2}} \\ \sqrt[3]{a^2} & a^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[3]{a^2 b^3 c} & ab^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}, \end{array}$$

L'emploi des exposants fractionnaires ne sera vraiment utile que s'il est permis de remplacer un exposant fractionnaire par un autre égal au premier. Or c'est ce qui a lieu effectivement; car multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes d'un exposant fractionnaire, revient à multiplier ou diviser par un même nombre l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical, ce qui, comme on l'a vu plus haut, ne change pas la valeur du radical.

On pourra donc, si l'on veut, réduire un exposant fractionnaire à sa plus simple expression. Soit, par exemple, le radical $\sqrt[12]{a^{20}}$, qui s'écrit symboliquement $a^{\frac{20}{12}}$; en simplifiant l'exposant fractionnaire $\frac{20}{12}$, on obtient le symbole $a^{\frac{5}{3}}$, qui représente le radical $\sqrt[3]{a^5}$, égal au premier.

Calcul des exposants fractionnaires.

Nous allons faire voir maintenant que les règles du calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

14. Multiplication. Nous avons démontré que, pour mul-

multiplier deux puissances entières d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Je dis, par exemple, que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

En effet, les deux puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$ représentent par convention les deux radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[q]{a^p}$; pour multiplier ces deux radicaux, on les réduira d'abord au même indice (n° 12), ce qui donne

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Or ce dernier radical, produit des deux premiers, s'écrit

$$a^{\frac{mq+np}{nq}},$$

ou

$$a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

en remarquant que l'exposant $\frac{mq+np}{nq}$ est la somme des deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$. On a donc

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Exemples.

$$1^{\circ} \quad a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a,$$

$$2^{\circ} \quad a \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}},$$

$$3^{\circ} \quad a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}},$$

$$4^{\circ} \quad a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+1+2}{6}} = a^{\frac{6}{6}} = a.$$

15. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants fractionnaires, celle de la division l'est par cela même. Ainsi, pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffira de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Je dis que

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}};$$

car si l'on multiplie le quotient par le diviseur, ce qui se fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende $a^{\frac{m}{n}}$.

Exemples.

$$1^{\circ} \quad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}},$$

$$2^{\circ} \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a,$$

$$3^{\circ} \quad \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}},$$

$$4^{\circ} \quad \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}.$$

16. *Puissance.* Nous avons démontré que l'on élève un nombre à deux puissances entières successives en l'élevant à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants. Nous allons faire voir que la même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant est fractionnaire, le second entier. On a, en appliquant la règle de la multiplication,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \dots = a^{\frac{mp}{n}}.$$

2° Supposons le second exposant fractionnaire et de la forme $\frac{1}{q}$.

Je dis que

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{m}{nq}}.$$

En effet, l'expression proposée signifie $\sqrt[q]{a^{\frac{m}{n}}}$; or, si l'on élève le second membre $a^{\frac{m}{nq}}$ à la puissance entière q , d'après ce qui vient d'être dit, on reproduit $a^{\frac{mq}{nq}}$ ou $a^{\frac{m}{n}}$; donc ce second membre est égal à la racine q^{e} de $a^{\frac{m}{n}}$.

3° Supposons maintenant les deux exposants fractionnaires. On a, par définition,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}.$$

Mais

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}};$$

donc

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

L'exposant du résultat est le produit des deux exposants $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$.

Exemples.

$$1^{\circ} \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}},$$

$$2^{\circ} \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a,$$

$$3^{\circ} \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^2,$$

EXPOSANTS INCOMMENSURABLES.

17. Prenons comme exemple l'expression $a^{\sqrt{2}}$. Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, deux nombres fractionnaires, différant de $\frac{1}{n}$, et comprenant entre eux le nombre incommensurable $\sqrt{2}$; l'expression $a^{\sqrt{2}}$ désignera la limite commune des deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, quand la différence $\frac{1}{n}$ devient de plus en plus petite. Mais, pour compléter cette définition, il faut démontrer que les deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$ tendent effectivement vers une limite commune: c'est ce que nous ferons voir plus tard, quand nous aurons établi quelques propriétés des puissances servant à la définition des logarithmes.

Admettant pour le moment l'existence de cette limite, nous remarquerons que toutes les règles démontrées pour le calcul des exposants fractionnaires, s'étendent évidemment aux exposants incommensurables.

Ainsi

$$a^{\sqrt{2}} a^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2} + \sqrt{2}},$$

$$(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}},$$

$$(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = a^2.$$

EXPOSANTS NÉGATIFS.

Définition.

18. Nous savons que pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, lorsque l'exposant du diviseur est plus petit que celui du dividende.

Si l'on applique la même règle dans le cas où l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, on obtient un exposant négatif. Soit le quotient $\frac{a^4}{a^7}$; l'exposant du diviseur étant plus grand que celui du dividende, la division est impossible; mais, si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole a^{-3} ; le quotient proposé, simplifié, devient $\frac{1}{a^3}$; ainsi le symbole a^{-3} peut être adopté comme représentant le quotient $\frac{1}{a^3}$.

En général, on est convenu de représenter le quotient $\frac{1}{a^m}$, dans lequel l'exposant m est quelconque, entier ou fractionnaire, par le symbole a^{-m} . L'exposant négatif remplace ainsi le signe de la division.

Calcul des exposants négatifs.

Nous allons faire voir que les règles établies précédemment pour le calcul des exposants positifs s'étendent aux exposants négatifs.

19. *Multiplication.* Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter algébriquement les expo-

sants, quels que soient ces exposants, positifs ou négatifs.

1° Considérons d'abord le cas où l'un des exposants est positif, l'autre négatif. Soit à multiplier a^m par a^{-n} (m et n étant deux nombres positifs quelconques, entiers ou fractionnaires, ou même incommensurables); puisque a^{-n} par convention représente $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n};$$

mais le quotient $\frac{a^m}{a^n}$ est représenté dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n , par le symbole a^{m-n} ; donc

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

L'exposant du produit est la somme algébrique des deux exposants.

2° Supposons maintenant les deux exposants négatifs. Soit à multiplier a^{-m} par a^{-n} . Puisque les symboles a^{-m} et a^{-n} désignent les quotients $\frac{1}{a^m}$ et $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}.$$

Mais cette dernière expression est représentée par $a^{-m-(+n)}$ ou a^{-m-n} . On a donc

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}.$$

L'exposant du produit est encore la somme algébrique des exposants.

Exemples.

- 1° $a^3 \times a^{-3} = a^0,$
- 2° $a^{-3} \times a^3 = a^0,$
- 3° $a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1,$
- 4° $a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}.$

20. *Division.* La règle de la division étant étendue aux exposants négatifs, celle de la division l'est par cela même. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffit de retrancher algébriquement l'exposant du diviseur de celui du dividende; car en multipliant le quotient ainsi obtenu par le diviseur, on reproduit le dividende. Remarquons que ceci revient à transformer le diviseur en multiplicateur par le changement de signe de son exposant.

Exemples.

- 1° $\frac{a^{-3}}{a^3} = a^{-3} \times a^{-3} = a^{-6},$
- 2° $\frac{a^3}{a^{-3}} = a^3 \times a^3 = a^6,$
- 3° $\frac{a^{-3}}{a^{-3}} = a^{-3} \times a^3 = a^0 = 1,$
- 4° $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3} \times a^5 = a^2.$

21. *Puissance.* Pour élever un nombre à deux puissances successives, il suffit de multiplier entre eux les deux exposants, quels que soient leurs signes.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant est négatif, le second positif. Soit l'expression $(a^{-m})^n$. Puisque a^{-m} représente $\frac{1}{a^m}$, on a

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}};$$

mais ce résultat peut être représenté par a^{-mn} ; donc

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

2° Supposons le premier exposant positif, le second négatif. Soit l'expression $(a^m)^{-n}$; par convention, cette expression représente le quotient

$$\frac{1}{(a^m)^n},$$

qui est égal à $\frac{1}{a^{mn}}$ et qui peut être représenté par a^{-mn} .

Donc

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}.$$

3° Supposons enfin les deux exposants négatifs. L'expression $(a^{-m})^{-n}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{-m})^n};$$

mais on a vu que

$$(a^{-m})^n = a^{-mn};$$

donc

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}.$$

Ainsi, dans tous les cas, l'exposant du résultat est le produit algébrique des deux exposants, conformément à la règle des signes.

Exemples.

$$1^\circ \quad (a^{-2})^3 = a^{-6},$$

$$2^\circ \quad (a^3)^{-2} = a^{-6},$$

$$3^\circ \quad (a^{-2})^{-3} = a^6,$$

Tout ce que nous avons dit sur le calcul des exposants fractionnaires et négatifs, peut se résumer en deux règles fondamentales :

$$1^{\circ} \quad a^m \times a^n = a^{m+n},$$

$$2^{\circ} \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

m et n désignant des exposants quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

CHAPITRE II.

DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES EN GÉNÉRAL.

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

SOMMATION DES TERMES.

Voyez la première partie, du n° 178 au n° 193.

CE QU'ON APPELLE SÉRIE. CONVERGENCE ET DIVERGENCE.

22. On appelle *série*, en mathématique, une suite indéfinie de quantités qui se déduisent les unes des autres, suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les *termes* de la série.

Lorsque la somme des termes de la série tend vers une limite finie et déterminée, on dit que la série est *convergente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*.

Nous désignerons les termes successifs d'une série par

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

et par S_n la somme des n premiers termes

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}.$$

Si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie S , lorsqu'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la série est convergente; sinon, elle est divergente.

UNE PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE EST CONVERGENTE, SI LA RAISON EST PLUS PETITE QUE L'UNITÉ; DIVERGENTE, SI LA RAISON EST PLUS GRANDE QUE L'UNITÉ.

23. La progression géométrique, prolongée à l'infini, nous donne un premier exemple de série. Soit a le premier terme, r la raison; la série s'écrit

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

La loi de formation de la série est très-simple; on déduit chaque terme du précédent en le multipliant par un nombre constant r .

Si la raison r est plus grande que l'unité, les termes de la série vont en augmentant indéfiniment; il est clair que la somme des termes augmente de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée; donc la série est divergente.

Si la raison est plus petite que l'unité, les termes de la série diminuent indéfiniment, de manière à devenir plus petits que toute quantité donnée. Nous avons trouvé pour la somme des n premiers termes (1^{re} partie, n° 195),

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r};$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devenant plus petite que toute quantité donnée, on voit que la somme des termes tend vers une limite finie et déterminée

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi, dans ce cas, la série est convergente; cette limite $\frac{a}{1-r}$ est ce que l'on appelle la somme des termes de la série.

LES TERMES D'UNE SÉRIE PEUVENT DÉCROÎTRE INDÉFINIMENT
SANS QUE LA SÉRIE SOIT CONVERGENTE.

24. Une première condition nécessaire pour qu'une série soit convergente, c'est que ses termes deviennent plus petits que toute quantité donnée. En effet, soit S_n la somme des n premiers termes, S_{n+1} la somme des $n+1$ premiers termes; si la série est convergente, ces deux sommes tendent vers la même limite S , quand n augmente indéfiniment; elles diffèrent donc très-peu de la limite S , lorsque n est très-grand, et par conséquent diffèrent très-peu l'une de l'autre. Mais la différence de ces deux sommes est le terme u_n de la série; on en conclut que ce terme u_n tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment.

C'est ce qui a lieu dans la progression géométrique décroissante; ses termes deviennent en effet plus petits que toute quantité donnée.

Mais cette condition n'est pas suffisante; les termes

d'une série peuvent devenir plus petits que toute quantité donnée, sans que la série soit convergente. Un exemple très-simple mettra cette proposition en évidence. Considérons la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

formée de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs les nombres entiers consécutifs; le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro, et cependant la série est divergente.

Prenons en effet le troisième et le quatrième terme

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

et remplaçons $\frac{1}{3}$ par la quantité plus petite $\frac{1}{4}$, nous aurons

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4},$$

plus simplement

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les quatre termes suivants

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

et remplaçons chacun des trois premiers par la quantité plus petite $\frac{1}{8}$, nous aurons

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

En prenant de même les huit termes suivants, et remplaçant chacun d'eux par $\frac{1}{16}$, on aurait

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

et ainsi de suite indéfiniment. Nous formons ainsi une infinité de groupes dont chacun est plus grand que $\frac{1}{2}$; donc la somme des termes devient plus grande que toute quantité donnée et par conséquent la série est divergente.

25. *Remarques.* Quand nous disons que les termes d'une série convergente tendent vers zéro, cela ne signifie pas qu'ils diminuent continuellement de manière que chacun d'eux soit plus petit que le précédent. Écrivons, par exemple, la progression décroissante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

dans l'ordre suivant

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

la série reste évidemment convergente; les termes tendent vers zéro, mais avec des alternatives de croissance et de décroissance.

Une série peut être divergente de deux manières, soit que la somme des termes augmente à l'infini, soit que la somme, conservant une valeur finie, ne tende pas vers une limite déterminée. Lorsque la série a tous ses termes positifs, si la somme conserve une valeur finie, comme elle croît sans

cesse, elle tend nécessairement vers une certaine limite qu'elle ne peut dépasser, et la série est convergente. Mais, lorsque les termes sont affectés de signes différents, de ce que la somme conserve une valeur finie, on ne peut plus conclure la convergence de la série. Soit, par exemple, la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la somme est alternativement 1 et 0; quoique restant finie, elle ne tend pas vers une limite déterminée et la série est divergente.

UNE SÉRIE EST CONVERGENTE LORSQUE, A PARTIR D'UN CERTAIN TERME, LA VALEUR ABSOLUE DU RAPPORT D'UN TERME AU PRÉCÉDENT EST CONSTAMMENT INFÉRIEURE A UN NOMBRE DÉTERMINÉ PLUS PETIT QUE L'UNITÉ.

26. Commençons par établir un principe général sur la convergence des séries.

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Nous avons désigné par S_n la somme des n premiers termes,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1};$$

prenons à la suite un nombre quelconque m de termes et appelons z leur somme

$$z = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m-1};$$

En ajoutant cette somme z à la première somme S_n , nous obtiendrons la somme S_{n+m} des $n + m$ premiers termes de

la série. Or, si la série est convergente, les deux sommes S_n et S_{n+m} tendent vers une même limite, quel que soit m , quand n augmente indéfiniment, et par conséquent leur différence, ou la somme ε , tend vers zéro. Réciproquement si la somme ε tend vers zéro, quel que soit m , quand n augmente indéfiniment, toutes les sommes désignées par S_{n+m} , différant très-peu les unes des autres, quand n est très-grand, tendent évidemment vers une limite commune, et la série est convergente. Ainsi pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que la somme d'un nombre quelconque de termes à partir d'un terme de plus en plus éloigné devienne plus petite que toute quantité donnée.

Cela posé, considérons une série ayant tous ses termes positifs, et supposons qu'à partir d'un certain terme le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent, reste constamment inférieur à un nombre déterminé k plus petit que l'unité; je dis que la série est convergente. En effet, à partir d'un certain terme, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

De la première inégalité, on déduit

$$u_{n+1} < k u_n.$$

La seconde donne

$$u_{n+2} < ku_{n+1},$$

et, si l'on remplace le terme u_{n+1} par la quantité plus grande ku_n , on a *a fortiori*

$$u_{n+2} < k^2 u_n.$$

On déduit de même de la troisième

$$u_{n+3} < ku_{n+2},$$

et, en remplaçant u_{n+2} par la quantité plus grande $k^2 u_n$,

$$u_{n+3} < k^3 u_n,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là qu'à partir d'un certain rang les termes de la série sont respectivement plus petits que ceux de la progression géométrique décroissante

$$u_n + ku_n + k^2 u_n + \dots;$$

on en conclut déjà que les termes de la série tendent vers zéro. Imaginons maintenant qu'à la suite du n^{e} terme on en prenne un nombre quelconque m ,

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m-1};$$

la somme de ces termes sera plus petite que la somme des termes de la progression

$$u_n + ku_n + k^2 u_n + \dots + k^{m-1} u_n,$$

c'est-à-dire plus petite que $\frac{u_n(1-k^m)}{1-k}$. On voit que, lorsque n augmente indéfiniment, m étant quelconque, cette somme devient plus petite que toute quantité donnée, puis-

que u_n tend vers zéro. Donc, en vertu du principe général énoncé plus haut, la série est convergente.

Nous avons supposé dans ce qui précède que la série a tous ses termes positifs; le même raisonnement subsiste lorsque les termes sont affectés de signes quelconques; faisant abstraction des signes, on considérera seulement la valeur absolue du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Nous avons vu que lorsqu'on prend tous les termes positivement, la somme d'un nombre quelconque de termes, à partir du n^e , devient plus petite que toute quantité donnée: si les signes sont différents, la valeur absolue de cette somme, étant plus petite que la précédente, devient elle-même plus petite que toute quantité donnée, et la série est convergente.

27. Lorsqu'à partir d'un certain terme la valeur absolue du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste constamment supérieure à un nombre déterminé k plus grand que l'unité, la série est divergente. On a en effet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k,$$

$$\dots\dots\dots$$

On déduit de ces inégalités

$$\begin{aligned} u_{n+1} &> k u_n, \\ u_{n+2} &> k u_{n+1} > k^2 u_n, \\ u_{n+3} &> k u_{n+2} > k^3 u_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les termes de la série étant, à partir d'un certain rang, supérieurs à ceux d'une progression géométrique croissante, deviennent plus grands que toute quantité donnée; donc la série est divergente.

28. REMARQUE. Tels sont les deux théorèmes fondamentaux sur la convergence et la divergence des séries. On en facilite beaucoup l'application par les considérations suivantes. Ordinairement le rapport d'un terme au précédent $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par λ , lorsque n augmente indéfiniment. Il y a trois cas à distinguer, suivant que la limite λ du rapport est inférieure, supérieure ou égale à l'unité.

1° $\lambda < 1$. Choisissons un nombre arbitraire mais déterminé k , compris entre 1 et λ , c'est-à-dire plus petit que l'unité, mais plus grand que λ . Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ , restera constamment inférieur au nombre k , à partir d'un certain rang; donc, en vertu du théorème démontré, la série est convergente.

2° $\lambda > 1$. Choisissons de même un nombre arbitraire k , compris entre 1 et λ , c'est-à-dire plus grand que l'unité, mais plus petit que λ . Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ , restera constamment, à partir d'un certain terme, supérieur au nombre k ; donc la série est convergente.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

dont le terme général est

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n};$$

le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{x}{n};$$

ce rapport a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment; donc la série est convergente quelle que soit la valeur de x .

Considérons encore la série

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{n}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{n-1}{n} x \quad \text{ou} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) x;$$

et a pour limite x , quand n augmente indéfiniment. Ainsi la série est convergente quand la valeur absolue de x est plus petite que l'unité; divergente, quand elle est plus grande que l'unité.

3° $\lambda = 1$. Quand le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite égale à l'unité, il y a ambiguïté; la série est tantôt convergente, tantôt divergente. Le théorème précédent est insuffisant pour décider la convergence de la série; il faut alors recourir à des moyens particuliers.

Exemples.

1° Soit la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Le rapport du terme général $\frac{1}{n}$ au précédent est $\frac{n-1}{n}$ ou

$1 - \frac{1}{n}$, et a pour limite l'unité. Cette série est celle que nous avons étudiée au n° 24; à l'aide d'un groupement convenable des termes, nous avons reconnu qu'elle est divergente.

2° Soit la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Le rapport d'un terme au précédent

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

a encore pour limite l'unité, et la question de convergence reste indécise. Mais on peut démontrer aisément que la série est convergente en groupant les termes d'une manière analogue à celle que nous avons employée dans l'exemple précédent. Prenons d'abord le second et le troisième termes, et remplaçons le troisième $\frac{1}{3^2}$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2^2}$, nous aurons

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Formons un second groupe avec les quatre termes suivants

et remplaçons chacun d'eux par une quantité plus grande $\frac{1}{4^2}$, nous aurons de même

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

On formera le troisième groupe avec les huit termes suivants, en remplaçant chacun par le premier d'entre eux, ce qui donne

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{15^2} < \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8},$$

et ainsi de suite indéfiniment. On voit par là que la somme des termes de la série est plus petite que la somme des termes de la progression décroissante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Donc la série est convergente.

LORSQUE LES TERMES D'UNE SÉRIE DÉCROISSENT INDÉFINIMENT ET SONT ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS, LA SÉRIE EST CONVERGENTE.

29. Soit la série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Nous supposons que les termes deviennent plus petits que toute quantité donnée, et en outre diminuent continuellement, de manière que chacun soit plus petit que le précédent. A partir du n° terme, prenons un nombre quelconque

m de termes, et désignons par ε la somme de ces termes

$$\varepsilon = \pm(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \dots \pm u_{n+m-1}).$$

Groupant les termes deux à deux et faisant abstraction du signe $\pm$ placé en avant, suivant que n est pair ou impair, nous écrirons le polynôme entre parenthèses de deux manières

$$(1) \quad (u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots$$

$$(2) \quad u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \dots$$

Puisque les termes vont en diminuant, chacune des parenthèses a une valeur positive; l'expression (1) montre que le polynôme a une valeur positive comme somme de quantités positives; l'expression (2) montre que cette valeur positive est moindre que u_n , puisqu'elle est égale à u_n diminuée de plusieurs quantités positives. Ainsi, la somme ε est, en valeur absolue, moindre que u_n , quel que soit m ; le terme u_n devenant plus petit que toute quantité donnée quand n augmente indéfiniment, la somme ε tend elle-même vers zéro; donc la série est convergente.

La limite de la somme des termes de la série est égale à la somme des n premiers termes.

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots \pm u_{n-1},$$

plus le reste de la série ou la somme des termes suivants. Ce reste est la limite de la somme ε des m termes suivants, quand m augmente de plus en plus; or nous savons que la somme ε est plus petite que u_n , quelque grand que soit m ; ainsi, le reste de la série est moindre que u_n . Quand n est pair, le reste a une valeur positive, et la limite S de la somme des termes de la série est plus grande que S_n ; quand n est impair, le reste a une valeur négative, et la

limite S est plus petite que S_n . Il en résulte que la limite S est toujours comprise entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1} . Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, on obtient des sommes alternativement trop grandes et trop petites, qui se rapprochent de plus en plus de la limite, en oscillant en quelque sorte de part et d'autre.

Exemples.

1° La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

dont les signes sont alternés, et dont les termes diminuent indéfiniment, est convergente. Les sommes

$$1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,8555$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0,5833$$

sont alternativement trop grandes et trop petites. Mais la série converge très-lentement; car si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur étant moindre que le terme suivant ou que $\frac{1}{11}$, on n'a qu'un chiffre décimal exact; si l'on prend les cent premiers termes, on a une approximation de $\frac{1}{101}$, ou deux chiffres exacts; etc.

2° La série

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \dots$$

converge beaucoup plus rapidement.

Si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur commise

étant moindre que le terme suivant

$$\frac{1}{1.2. \dots 12} = 0,00000003;$$

on a la somme avec huit décimales exactes.

30. Étude de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

Nous avons déjà reconnu que cette série est convergente (n° 28). La somme des termes est comprise entre 2 et 3; en effet, les deux premiers termes donnent déjà une somme égale à 2; les termes suivants sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

obtenue en remplaçant chacun des facteurs 3, 4, 5, ... par un facteur plus petit 2, ce qui augmente les fractions; la somme des termes de la progression étant égale à l'unité, la somme des termes de la série à partir du troisième est moindre que 1, et par conséquent la somme entière est moindre que 3.

La somme de la série proposée est incommensurable. Supposons, en effet, que cette somme soit égale à une fraction ordinaire $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

Si nous écrivons d'abord les $n + 1$ premiers termes, et si nous mettons les suivants sous la forme

$$\frac{1}{1.2.3. \dots n} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right],$$

nous aurons

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2.\dots.n} \\ + \frac{1}{1.2.\dots.n} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right].$$

Multiplions ensuite tous les termes de l'égalité par le produit $1.2.3.\dots.n$, le premier membre devient un nombre entier $1.2.3.\dots.(n-1)m$; les $n+1$ premiers termes du second membre deviennent aussi des nombres entiers, dont, pour abréger, nous désignerons la somme par N ; on obtient de la sorte l'égalité

$$1.2.\dots.(n-1)m = N + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right].$$

La quantité entre parenthèse est une fraction moindre que l'unité; car ses termes sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

obtenue en remplaçant chacun des facteurs $n+2, n+3, \dots$ par le facteur plus petit $n+1$, ce qui augmente chacune des fractions; la somme des termes de cette progression étant égale à $\frac{1}{n}$, la quantité entre parenthèse est moindre

que $\frac{1}{n}$; c'est donc une fraction proprement dite. On aurait donc dans l'égalité précédente un nombre entier égal à un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. Ainsi, la somme des termes de la série proposée est un nombre incommensurable compris entre 2 et 3; ce nombre joue un grand rôle en mathématiques; on le désigne par la lettre e .

Appelons R le reste de la série, ou l'erreur commise quand on prend les $n+1$ premiers termes,

$$R = \frac{1}{1.2\dots n} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right];$$

la parenthèse étant moindre que $\frac{1}{n}$, d'après ce qui vient d'être dit, on a

$$R < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

Ainsi, quand on prend $n+1$ termes, l'erreur commise est moindre que la n^{e} partie du dernier terme calculé.

Je présente ici le calcul de e avec sept chiffres décimaux.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \frac{1}{1.2} = 0,5 \\
 \frac{1}{1.2.3} = 0,1666\ 6667 \\
 \frac{1}{1.2.3.4} = 0,0416\ 6667 \\
 \frac{1}{1.2\dots 5} = 0,0085\ 3535 \\
 \frac{1}{1.2\dots 6} = 0,0015\ 8889 \\
 \frac{1}{1.2\dots 7} = 0,0001\ 9841 \\
 \frac{1}{1.2\dots 8} = 0,0000\ 2480 \\
 \frac{1}{1.2\dots 9} = 0,0000\ 0276 \\
 \frac{1}{1.2\dots 10} = 0,0000\ 0028 \\
 \frac{1}{1.2\dots 11} = 0,0000\ 0003 \\
 \hline
 2,7182\ 8184
 \end{array}$$

Les termes se déduisent les uns des autres par divisions successives. Nous avons pris les douze premiers termes ; l'erreur commise, en négligeant les termes suivants, est moindre que la 11^e partie du dernier terme ; cette cause d'erreur n'affecte même pas la huitième décimale. On a donc, avec sept décimales exactes,

$$e = 2,718\,2818.$$

CHAPITRE III.

FORMULES DU BINÔME ET SES APPLICATIONS.

ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS ET COMBINAISONS.

Arrangements.

31. Je suppose que l'on ait m objets distincts. On appelle *arrangements* de m objets n à n les différentes dispositions que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, et les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Deux arrangements diffèrent, par la nature des objets qui les composent, ou seulement par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c , prises deux à deux de toutes les manières, on peut former les six arrangements suivants

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Le premier et le troisième ne diffèrent que par l'ordre des

lettres ; de même le second et le cinquième , le quatrième et le sixième.

Nous représenterons en général les m objets par les premières lettres de l'alphabet

$a, b, c, \dots, k,$

et nous désignerons par le symbole A_m^n le nombre des arrangements que l'on peut former avec ces m objets pris n à n de toutes les manières possibles.

On obtient évidemment les arrangements des m lettres une à une, en prenant chacune d'elles séparément, ce qui donne m arrangements

$a, b, c, \dots, k.$

Ainsi

$$A_m^1 \cong m.$$

Nous obtiendrons les arrangements des m lettres deux à deux en mettant à la suite de la première lettre a successivement chacune des autres lettres, à la suite de la seconde lettre b successivement chacune des autres, et ainsi de suite, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} ab, ac, ad, \dots, ak, \\ ba, bc, bd, \dots, bk, \\ ca, cb, cd, \dots, ck, \\ \vdots \\ ka, kb, kc, \dots, kh. \end{array}$$

La première ligne horizontale contenant tous les arrangements qui commencent par la lettre a , la deuxième tous ceux qui commencent par la lettre b , etc., nous avons ainsi formé tous les arrangements des m lettres deux à

deux. Puisque chaque ligne horizontale renferme $m - 1$ arrangements, et qu'il y a m lignes, le nombre des arrangements contenu dans le tableau est $m(m-1)$; on a donc

$$A_m^2 = m(m-1).$$

De même, si à la suite de chacun des arrangements deux à deux on place chacune des $m - 2$ autres lettres, on forme les arrangements trois à trois

abc, abd, ..., abk,
acb, acd, ..., ack,
.
bac, bad, ..., bak,
.
.

A la suite du premier arrangement *ab* de deux lettres, nous avons écrit chacune des autres lettres *c, d, ... k*; de même à la suite du second *ac*, chacune des autres lettres *b, d, ... k*; etc. On a formé ainsi tous les arrangements trois à trois; car un arrangement de trois lettres se compose nécessairement d'un arrangement de deux lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement n'est pas répété deux fois; car les arrangements d'une même ligne horizontale diffèrent par la troisième lettre, et deux arrangements de deux lignes différentes par l'arrangement des deux premières. Chaque ligne horizontale contient $m - 2$ arrangements, il y a $m(m-1)$ lignes horizontales, autant que d'arrangements deux à deux; donc le nombre des arrangements de m lettres trois à trois est $m(m-1)(m-2)$; on a donc

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1).$$

Le nombre des arrangements de m objets n à n est égal au produit des n nombres entiers consécutifs décroissants à commencer par m .

32. Il est bon de s'assurer que la formule précédente, écrite par induction, est générale. Supposons que l'on ait formé les arrangements de m lettres $n-1$ à $n-1$, et que l'on veuille former les arrangements n à n ; à la suite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$, on écrira successivement chacune des $m-n+1$ autres lettres. On obtiendra de la sorte tous les arrangements n à n ; car un arrangement de n lettres se compose d'un arrangement de $n-1$ lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement ne se trouve pas répété deux fois; car deux quelconques des arrangements ainsi obtenus diffèrent par la dernière lettre ou par l'arrangement des $n-1$ premières lettres. Chaque arrangement ancien donnant $m-n+1$ arrangements nouveaux, on a la relation générale

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

On en déduit, en diminuant successivement n d'une unité,

$$A_m^{n-1} = A_m^{n-2} \times (m-n+2),$$

$$A_m^{n-2} = A_m^{n-3} \times (m-n+3),$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$A_m^2 = A_m^1 \times (m-1);$$

on sait d'ailleurs que

$$A_m^1 = m.$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$A_m^n = m(m-1) \dots (m-n+1).$$

Applications. 1° Quel est le nombre des arrangements de sept lettres trois à trois? c'est le produit de trois nombres entiers consécutifs décroissants, à commencer par 7.

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

2° Combien y a-t-il de nombres composés de deux chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements avec les neuf chiffres significatifs deux à deux.

$$A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

3° Combien y a-t-il de nombres composés de cinq chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements cinq à cinq avec les neuf chiffres significatifs.

$$A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120.$$

Permutations.

33. On appelle PERMUTATIONS de m objets les différentes dispositions que l'on peut donner à ces m objets, en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Chaque permutation contient tous les objets et deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Ainsi avec deux lettres a et b , on peut former deux permutations

$$ab, ba.$$

Nous désignerons en général par P_m le nombre des permutations de m objets. Il résulte de la définition que les permutations de m objets ne sont autre chose que les arrangements de ces m objets pris tous ensemble, c'est-à-dire m à m ; on a donc, suivant la notation habituelle,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \dots 5 \cdot 2 \cdot 1,$$

ou, si l'on change l'ordre des facteurs,

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m.$$

Le nombre des permutations de m objets égale le produit des m premiers nombres entiers.

Applications. 1° Combien peut-on former de mots de trois lettres avec trois lettres données? C'est le nombre des permutations de trois lettres

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

2° De combien de manières peut-on disposer dix soldats en ligne? C'est le nombre des permutations de dix objets :

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

34. Nous avons déduit la formule des permutations de celle des arrangements comme cas particulier. Voici comment on peut établir cette formule directement.

On ne peut évidemment donner qu'une disposition à une lettre a ; ainsi

$$P_1 = 1.$$

Avec deux lettres a et b , on peut former deux permutations

$$ab, ba,$$

et l'on a

$$P_2 = 1 \cdot 2.$$

Si, dans chacune des permutations précédentes, on introduit la lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu, au commencement, on obtient les permutations de trois lettres a, b, c ,

$$\begin{aligned} abc, acb, cab, \\ bac, bca, cba. \end{aligned}$$

On a formé ainsi toutes les permutations de trois lettres; car une permutation de trois lettres se compose d'une permutation des deux premières lettres a et b à laquelle on ajoute la troisième lettre c . La même permutation ne se trouve pas répétée deux fois; car deux permutations quelconques diffèrent, soit par la place de la lettre c , soit par la disposition des deux autres. Chacune des permutations précédentes donnant trois permutations nouvelles, on a

$$P_3 = P_2 \times 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

De même, si dans chacune des permutations des trois lettres a, b, c , on introduit la lettre d à toutes les places, et il y a quatre places, deux intermédiaires et deux extrêmes, on obtient les permutations des quatre lettres a, b, c, d ; chacune des permutations précédentes donnant quatre permutations nouvelles, on a

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la for-

mule générale

$$P_m = 1.2.3. . . . m.$$

33. *Remarque.* Le dénominateur commun des formules servant à la résolution d'un système d'équations générales du premier degré (n° 5) se compose d'un certain nombre de termes qui sont précisément les permutations que l'on peut faire avec les lettres $a, b, c, \dots, k$ servant de coefficients aux inconnues. Ainsi pour trois inconnues, le dénominateur contient six termes, les six permutations des trois lettres a, b, c , et nous avons appris à former ce dénominateur au moyen des permutations de deux lettres, comme précédemment.

De même pour quatre inconnues, le dénominateur contiendra 24 termes, les permutations des quatre lettres a, b, c, d . On le formera, au moyen du précédent, en mettant dans chacun des termes la lettre d à toutes les places de droite à gauche, donnant au premier terme de chaque groupe le signe du terme qui l'a fourni, et alternant les signes dans ce groupe. Voici ce dénominateur :

$$\begin{aligned} & ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' \\ & - ac'b''d''' + ac'd''b''' - ad'e''b''' + da'e''b''' \\ & + ca'b''d''' - ca'd''b''' + cd'a''b''' - dc'a''b''' \\ & - ba'e''d''' + ba'd''c''' - bd'a''c''' + db'a''c''' \\ & + bc'a''d''' - bc'd''a''' + bd'e''a''' - db'e''a''' \\ & - cb'a''d''' + cb'd''a''' - cd'b''a''' + dc'b''a''' \end{aligned}$$

La première lettre de chaque terme n'a pas d'accent, la seconde est affectée d'un accent, la troisième de deux, la quatrième de trois.

Combinaisons.

36. On appelle *combinaisons* de m objets n à n les différents groupes que l'on peut former avec ces m objets en les prenant n à n , de toutes les manières possibles, de façon que deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet. Dans les combinaisons on n'a pas égard à la disposition des objets.

Si l'on a m lettres et que l'on imagine qu'elles représentent des quantités différentes, on peut concevoir les combinaisons de ces m lettres n à n comme les différents produits que l'on peut former avec ces m lettres, en les prenant n à n de toutes les manières possibles.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c , prises deux à deux, on ne peut former que trois combinaisons

$$ab, ac, bc,$$

tandis que l'on a six arrangements.

Nous désignerons en général par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n . La formule des combinaisons se déduit de celle des arrangements et de celle des permutations. Imaginons en effet les combinaisons de m lettres n à n formées. Si nous donnons aux n lettres qui composent chacune de ces combinaisons toutes les dispositions possibles, c'est-à-dire si nous permutons ces n lettres, nous obtiendrons les arrangements des m lettres n à n . Nous aurons ainsi tous les arrangements; car un arrangement quelconque est une combinaison dans laquelle les n lettres qui la composent sont disposées dans un certain ordre; et nous n'aurons pas deux fois le même; car les arrangements fournis par une même combinaison diffèrent par l'ordre

des lettres et ceux qui sont fournis par des combinaisons différentes diffèrent au moins par la nature d'une lettre. Chaque combinaison donnant un nombre d'arrangements marqué par P_n , on a

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n},$$

et, en remplaçant par les valeurs connues,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Applications. Pour appliquer la formule, on écrit d'abord au dénominateur les n premiers nombres entiers, puis on écrit au numérateur un égal nombre de nombres entiers décroissants, à commencer par m :

1° Nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2.

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

2° Nombre des combinaisons de 10 lettres 4 à 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

3° Nombre des combinaisons de 10 lettres 6 à 6.

$$C_{10}^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

4° Le nombre de combinaisons de m lettres uné à une est m , ce qui est évident *à priori*.

5° Le nombre des combinaisons de m lettres m à m est

$$C_m^m = \frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = 1.$$

- Il est évident en effet que si l'on prend toutes les lettres on ne peut former qu'une seule combinaison.

37. *Probabilité.* On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, lorsque tous ces cas sont également possibles. Je suppose qu'une urne renferme 12 boules, 7 blanches et 5 noires. On tire une boule au hasard, et l'on demande la probabilité pour chaque couleur. Il y a 12 cas possibles et également possibles : 7 pour les blanches, 5 pour les noires. La probabilité est donc $\frac{7}{12}$ pour la sortie

d'une blanche, $\frac{5}{12}$ pour la sortie d'une noire.

La loterie se composait de 90 numéros; à chaque tirage il en sortait 5 au hasard. Une personne désigne un numéro, par exemple, le numéro 20; si le numéro désigné se trouve parini les 5 numéros sortants, la personne a gagné, sinon elle a perdu. C'est là ce qu'on appelait prendre un *extrait*. Il est facile d'évaluer la probabilité. Puisqu'on tire 5 numéros à chaque fois, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 5 à 5,

$$C_{90}^5 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent le numéro désigné 20; pour les former, imaginons que l'on ôte ce numéro 20 et que l'on combine les 89 autres

numéros 4 à 4, puis que l'on ajoute à chacune de ces combinaisons le numéro 20; on aura de cette manière toutes les combinaisons qui contiennent le numéro 20. Ainsi le nombre des cas favorables est le nombre des combinaisons de 89 numéros 4 à 4,

$$C_{89}^4 = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

La probabilité de la sortie d'un numéro désigné ou le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles est le quotient de C_{89}^4 par C_{90}^5 , soit $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$.

Ainsi sur 18 cas possibles, il y en a 1 favorable à la personne qui prend l'extrait, et 17 pour la loterie. Il faudrait donc parier 1 contre 17. La loterie, au lieu de donner 17 fois la mise, ne donnait que 15 fois.

Lorsqu'on désigne deux numéros, on prend ce qu'on appelle un *ambe*; si les deux numéros désignés sont tous deux parmi les cinq numéros sortants, on a gagné; sinon on a perdu. Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent les deux numéros désignés; on les formerait en combinant les 88 autres numéros 5 à 5, et ajoutant à chacune des combinaisons les deux numéros désignés. Ainsi la probabilité de la sortie d'un ambe est le rapport de C_{88}^3 à C_{90}^5 , soit $\frac{4 \cdot 5}{89 \cdot 90}$ ou $\frac{2}{801}$. Il faudrait donc parier 2 contre 799 ou 1 contre $399 + \frac{1}{2}$; la loterie ne donnait que 270 fois la mise.

On trouvera de même que la probabilité du *terne* est $\frac{1}{11748}$, celle du *quaterne* $\frac{1}{511058}$. La loterie ne donnait

que 5500 fois la mise pour le terne, 75000 fois pour le quaterne.

38. Nous allons démontrer sur les combinaisons deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

THÉORÈME I. *Le nombre des combinaisons de m objets n à n est égal au nombre des combinaisons de ces m objets $m-n$ à $m-n$.*

Supposons en effet que l'on ait m numéros dans une urne; si l'on en tire n , il en restera $m-n$ dans l'urne; ainsi à chaque combinaison de n numéros correspond une combinaison de $m-n$, et réciproquement. On a donc

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

On peut d'ailleurs vérifier aisément l'égalité des deux nombres

$$C_m^n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n)};$$

car si l'on multiplie les deux termes de la première fraction par le produit $1 \cdot 2 \dots (m-n)$, les deux termes de la seconde par $1 \cdot 2 \dots n$, les dénominateurs deviennent égaux et l'on a au numérateur le produit des nombres entiers consécutifs de 1 à m ; il vient de la sorte

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{1 \cdot 2 \dots n \times 1 \cdot 2 \dots (m-n)}.$$

Par exemple, le nombre des combinaisons de 5 objets 4 à 4 est égal au nombre des combinaisons de 5 objets 1 à 1,

le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons 2 à 2.

39. THÉORÈME II. *Le nombre des combinaisons de m objets n à n est égal au nombre des combinaisons de $m-1$ objets n à n , plus le nombre des combinaisons de $m-1$ objets $n-1$ à $n-1$.*

En effet les combinaisons de m lettres $a, b, c, \dots, k$, prises n à n , peuvent être distinguées en deux catégories, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre k et celles qui la contiennent. La première catégorie se compose évidemment des combinaisons des $m-1$ premières lettres n à n . On obtiendra celles de la seconde catégorie en formant les combinaisons des $m-1$ premières lettres $n-1$ à $n-1$, et ajoutant à chacune d'elles la lettre k . On a donc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

On peut aussi vérifier facilement cette égalité au moyen de la formule des combinaisons.

Par exemple le nombre des combinaisons de 7 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 6 objets 3 à 3, plus le nombre des combinaisons de 6 objets 2 à 2.

DÉVELOPPÈMENT DES PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES D'UN BINÔME. TERME GÉNÉRAL.

40. On sait que le produit de deux polynômes est égal à la somme des produits obtenus en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. En général, le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les

manières possibles un terme dans chacun des polynômes proposés.

Proposons-nous d'abord d'effectuer le produit des m facteurs binômes

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + h)(x + k),$$

en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x .

Le produit de ces m facteurs binômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun d'eux. Si l'on prend les m premiers termes, on obtient le premier terme x^m du produit. Si on prend le second terme a dans le premier facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres, on obtient le produit ax^{m-1} qui est du degré $m-1$; prenant de même le second terme b dans le second facteur binôme et le premier terme x dans tous les autres, on a bx^{m-1} ; en un mot, le second terme de l'un quelconque des facteurs binômes, combiné avec les premiers termes de tous les autres, donne au produit un terme en x^{m-1} . Réunissant tous ces termes du degré $m-1$, on voit que x^{m-1} a pour multiplicateur la somme des m quantités $a, b, c, \dots, k$, somme que pour abrégé nous désignerons par S_1 . Ainsi le second terme du produit est $S_1 x^{m-1}$.

Prenons maintenant les seconds termes dans deux quelconques des facteurs binômes, et les premiers dans tous les autres, nous formerons les termes du degré $m-2$, tels que abx^{m-2} , acx^{m-2} , bcx^{m-2} , etc. Si nous réunissons tous ces termes, nous voyons que x^{m-2} , mis en facteur commun, sera multiplié par la somme des combinaisons deux à deux des m lettres $a, b, \dots, k$. Désignons par S_2 la somme de ces combinaisons, le troisième terme du produit sera $S_2 x^{m-2}$.

En prenant de même les seconds termes dans trois quelconques des facteurs binômes et les premiers dans tous les autres, on formera les termes du degré $m-3$, tels que $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, etc. Réunissant ces termes en un seul, et appelant S_3 la somme des combinaisons trois à trois des lettres $a, b, \dots, k$, on obtient le quatrième terme S_3x^{m-3} du produit.

En général, si l'on prend les seconds termes dans n quelconques des facteurs binômes et les premiers dans les $m-n$ autres, on forme les termes du degré $m-n$; réunissant ces termes et représentant par S_n la somme des combinaisons n à n des m lettres $a, b, \dots, k$, on a le terme général S_nx^{m-n} du produit.

Les termes du premier degré s'obtiennent en prenant les seconds termes dans tous les facteurs binômes, excepté un, et le premier dans cet autre; ces termes réunis donnent l'avant-dernier terme du produit $S_{m-1}x$. Enfin le produit $abc \dots k$ des seconds termes de tous les facteurs binômes, produit que nous désignerons par S_m , donne le dernier terme du produit demandé.

Ainsi le produit des m facteurs binômes se développe de la manière suivante :

$$x + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + S_3x^{m-3} \dots + S_nx^{m-n} \dots + S_{m-1}x + S_m.$$

41. Supposons maintenant que les quantités $a, b, c, \dots k$ soient égales entre elles, le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+k),$$

devient $(x+a)^m$. Voyons à quoi se réduit le développement : la somme S_1 des quantités $a, b, c, \dots k$ se réduit à ma , puisque chacune de ces quantités devient égale à a et qu'il y en a m . La lettre S_1 désigne la somme des combi-

naisons deux à deux de ces mêmes quantités; chacune de ces combinaisons devient égale à a^2 ; et il y en a un nombre marqué par le nombre des combinaisons de m lettres deux à deux, soit $\frac{m(m-1)}{1.2}$; leur somme S_2 est donc égale à $\frac{m(m-1)}{1.2} a^2$. De même S_3 désigne la somme des combinaisons trois à trois; chacune de ces combinaisons devenant égale à a^3 et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, leur somme égale $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3$.

En général S_n désigne la somme des combinaisons n à n des m quantités $a, b, c, \dots, k$; ces quantités devenant égales à a , chacune des combinaisons se réduit à a^n ; leur nombre étant évidemment le nombre des combinaisons de m lettres n à n , on a

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1.2.3 \dots n} a^n.$$

Enfin, le dernier terme ou le produit des m quantités égales $a, b, \dots, k$, se réduit à a^m .

On a ainsi la formule

$$\begin{aligned} 1) \quad (x+a)^m &= x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} \dots + \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m, \end{aligned}$$

connue sous le nom de *formule du binôme*. Elle est très-fréquemment employée; elle sert à former le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Le terme général, celui qui occupe le $n+1$ ^e rang dans le dévelop-

pement, est, comme nous l'avons dit,

$$(2) \quad \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} a^n x^{m-n}.$$

Si dans la formule (1) on remplace a par $-a$, on obtient le développement de $(x-a)^m$,

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} - \dots \pm a^m;$$

les signes alternent.

42. REMARQUE I. Dans la formule du binôme, les exposants de x vont en diminuant graduellement d'une unité, ceux de a vont au contraire en augmentant; la somme des exposants de a et de x dans chaque terme est constamment égale à m .

Le nombre des termes du développement est $m+1$; car les exposants de x forment la suite des m premiers nombres entiers, plus l'exposant zéro du dernier terme,

$$m, m-1, m-2, \dots, 1, 0,$$

en tout $m+1$ termes.

43. REMARQUE II. Les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux. Si l'on écrit la formule du binôme en laissant les lettres qui marquent les nombres de combinaisons, on a

$$\begin{aligned} (x+a)^m &= x^m + C_m^1 ax^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} \dots \\ &\quad + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m. \end{aligned}$$

Le premier terme et le dernier ont tous deux pour coefficients l'unité, le second terme et l'avant-dernier ont pour

coefficients C_m^1 et C_m^{m-1} ; mais, en vertu d'un théorème démontré (n° 58), on sait que ces deux nombres sont égaux. De même les troisièmes termes à partir des deux extrêmes ont pour coefficients les nombres égaux C_m^2 et C_m^{m-2} , etc.

44. REMARQUE III. Les coefficients se déduisent les uns des autres par une loi très-simple : *Multipliez le coefficient du dernier terme obtenu par l'exposant de x dans ce terme et divisez par l'exposant de a augmenté d'une unité, vous aurez le coefficient du terme suivant.*

En effet, nous avons trouvé pour terme général du développement

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)n} a^n x^{m-n};$$

le terme précédent est .

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} a^{n-1} x^{m-n+1}.$$

On déduit le terme général du précédent en augmentant d'une unité l'exposant de a et diminuant d'une unité celui de x . Quant au coefficient, on le forme en multipliant le coefficient précédent par l'exposant $m-n+1$ de x dans ce terme précédent, et divisant par n , exposant de a augmenté d'une unité.

Exemples :

Il importe de s'exercer à développer rapidement la puissance d'un binôme. La règle que nous venons d'indiquer facilite beaucoup le calcul.

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad (x+a)^7 &= x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 \\ &\quad + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7. \end{aligned}$$

Pour passer du second terme au troisième, il faut multiplier par 6 et diviser par 2, ce qui revient à multiplier par 3. Pour passer du troisième terme au quatrième, il faut multiplier par 5 et diviser par 3; on divisera d'abord 21 par 3, ce qui donne 7, et on multipliera par 5, ce qui donne 35. Le développement contenant $7 + 1$ ou 8 termes, et les termes également distants des extrêmes étant égaux, une fois trouvés les quatre premiers, on écrira les quatre autres immédiatement.

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad (x+a)^8 &= x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 \\ &+ 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8. \end{aligned}$$

Le développement contient 9 termes; il est nécessaire de calculer les cinq premiers, arrivé au terme $70a^4x^4$, on remarque que les coefficients se reproduisent.

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \quad (x-a)^{11} &= x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8 + 330a^4x^7 \\ &- 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a^8x^3 - 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}. \end{aligned}$$

Le nombre des termes étant pair, le dernier terme a le signe —, et les termes qui ont même coefficient sont affectés de signes contraires.

$$\begin{aligned} 4^{\circ} \quad (x-a)^{12} &= x^{12} - 12ax^{11} + 66a^2x^{10} - 220a^3x^9 + 495a^4x^8 \\ &- 792a^5x^7 + 924a^6x^6 - 792a^7x^5 + 495a^8x^4 - 220a^9x^3 \\ &+ 66a^{10}x^2 - 12a^{11}x + a^{12}. \end{aligned}$$

Le développement contenant un nombre impair de termes le dernier a le signe + et les termes qui ont même coefficient sont affectés du même signe.

45. REMARQUE IV. *Les coefficients vont en augmentant du commencement jusqu'au milieu du développement et en diminuant du milieu à la fin. En effet, le rapport du coeffi-*

cient du terme général à celui du terme précédent est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m-n+1}{n}.$$

C'est par ce rapport que l'on multiplie le coefficient du n^{e} terme pour former celui du $n+1^{\text{e}}$. Les coefficients vont en croissant tant que ce multiplicateur reste supérieur à l'unité; ils vont au contraire en décroissant quand ce multiplicateur devient inférieur à l'unité. Posons donc

$$\frac{m-n+1}{n} > 1,$$

et résolvons cette inégalité par rapport à n (1^{re} partie, n^o 109), nous aurons

$$n < \frac{m+1}{2}.$$

La fraction $\frac{m+1}{2}$ désigne la moitié du nombre des termes du développement; ainsi les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. A partir du milieu, l'inégalité change de sens et les coefficients décroissent.

Il y a deux cas à distinguer : 1^o lorsque m est pair, le nombre des termes $m+1$ est impair; il y a au milieu un coefficient plus grand que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x+a)^8$, dont nous n'écrivons ici que les coefficients

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,$$

le coefficient 70 est le plus grand. 2^o Lorsque m est impair, le nombre des termes est pair, il y a au milieu deux coeffi-

cients égaux plus grands que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x + a)^7$, dont les coefficients sont

$$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1,$$

les deux coefficients 35 du milieu sont les plus grands.

Ce qui précède donne une propriété des combinaisons qu'il est bon de remarquer. On demande, par exemple, de quelle manière il faut combiner huit objets pour avoir le plus grand nombre de combinaisons. Il est clair qu'il faut les combiner 4 à 4 ; car les coefficients du développement de $(x + a)^8$, à partir du second, sont les nombres de combinaisons que l'on peut former avec 8 objets, en les combinant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc... ; le plus grand coefficient étant le cinquième, il en résulte que le nombre des combinaisons des 8 objets 4 à 4 surpasse les autres nombres de combinaisons. De même, avec 7 objets, on obtient le plus grand nombre de combinaisons en les prenant 3 à 3 ou 4 à 4.

46. REMARQUE V. Si dans le développement de $(x + a)^m$ on fait $x = 1$ et $a = 1$, chaque terme se réduit à son coefficient et l'on a

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \dots + 1.$$

Ainsi la somme des coefficients du développement est égale à 2^m .

En retranchant le premier coefficient qui ne désigne pas un nombre de combinaisons, on en conclut que le nombre total des combinaisons que l'on peut faire avec m objets, en les prenant de toutes les manières possibles, est $2^m - 1$,

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 \dots + C_m^m = 2^m - 1$$

DÉVELOPPEMENT DE $(a + b\sqrt{-1})^n$.

47. Nous avons dit (1^{re} partie, n° 140) que l'on appelle quantité imaginaire une expression de la forme $a + b\sqrt{-1}$ ou de la forme $a + bi$ (la lettre i étant adoptée pour désigner le symbole $\sqrt{-1}$), dans laquelle les lettres a et b représentent des quantités réelles quelconques positives ou négatives. On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant à remplacer dans les résultats i^2 par -1 .

D'après cette convention, commençons par former les puissances successives de i . On a d'abord $i^2 = -1$. La troisième puissance i^3 étant égale à la deuxième i^2 multiplié par i , il vient

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i.$$

La quatrième étant égale à la troisième multipliée par i , on a de même

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = +1,$$

et ainsi de suite

$$i^5 = i^4 \times i = i,$$

$$i^6 = i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1$$

On obtient de la sorte la série des puissances

$$i^0 = +1, \quad i^1 = +i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$$

$$i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \quad i^6 = -1, \dots$$

La quatrième puissance i^4 étant égale à i^0 , il est clair que les mêmes résultats se reproduisent périodiquement de 4

en 4, et l'on a en général

$$i^{4m} = 1, \quad i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i.$$

Les puissances paires sont réelles, les puissances impaires imaginaires.

48. Si d'après la convention générale sur le calcul des quantités imaginaires, on applique la formule du binôme au développement de $(a + bi)^m$, on a

$$(a + bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bi + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 i^2 + \dots$$

En remplaçant les puissances successives de i par les valeurs trouvées précédemment, il vient

$$\begin{aligned} (a + bi)^m = & a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bi - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 i + \dots \end{aligned}$$

les termes sont alternativement réels et imaginaires. Réunissons enfin les termes réels et les termes imaginaires, nous aurons

$$\begin{aligned} (a + bi)^m = & \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 \dots \right] \\ & + \left[m a^{m-1} b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \dots \right] i. \end{aligned}$$

Dans chaque parenthèse les termes sont alternativement positifs et négatifs. Si l'on désigne par A et B les valeurs de ces deux parenthèses, on voit que le développement de $(a + bi)^m$ est une quantité imaginaire de la forme ordinaire $A + Bi$.

Il est clair que le développement de $(a - bi)^m$ ne diffère de celui de $(a + bi)^m$ qu'en ce que le signe de i est changé. Nous avons trouvé

$$(a + bi)^m = A + Bi;$$

il en résulte que

$$(a - bi)^m = A - Bi.$$

Applications :

$$1^{\circ} (1 + i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.$$

$$2^{\circ} (1 - i)^5 = -4 + 4i.$$

$$3^{\circ} (3 + 2i)^6 = 3^6 + 6 \cdot 3^5 \cdot 2i - 15 \cdot 3^4 \cdot 2^2 i^2 - 20 \cdot 3^3 \cdot 2^3 i^3 + 15 \cdot 3^2 \cdot 2^4 i^4 + 6 \cdot 3 \cdot 2^5 i^5 = -2035 - 828i.$$

$$4^{\circ} (3 - 2i)^6 = -2035 + 828i.$$

LIMITE VERS LAQUELLE TEND $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, QUAND m CROIT

AU DELÀ DE TOUTE LIMITE.

49. Nous allons d'abord démontrer deux lemmes qui nous serviront dans la question proposée.

LEMME I. *La limite de la somme d'un nombre fini de grandeurs variables est égale à la somme de leurs limites.* Soient $A, B, C, \dots, L$, m grandeurs variables qui tendent simultanément vers les limites $a, b, c, \dots, l$. Si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, les différences des grandeurs proposées à leurs limites, on a

$$A = a + \alpha,$$

$$B = b + \beta,$$

$$C = c + \gamma,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L = l + \lambda.$$

En additionnant ces égalités et désignant par S la somme des grandeurs variables et par s celle des limites, il vient

$$S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda).$$

Appelons p la plus grande des différences $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ en valeur absolue; leur somme sera moindre que mp . Or le nombre m restant fini, et la quantité p devenant plus petite que toute quantité donnée, puisque toutes les différences tendent vers zéro, le produit mp deviendra aussi plus petit que toute quantité donnée; donc la somme S tend vers la limite s .

LEMME II. *La limite du produit d'un nombre fini de facteurs variables est égal au produit de leurs limites.*

En conservant les mêmes notations que précédemment, nous avons les différences

$$\begin{aligned} A - a &= \alpha, \\ B - b &= \beta, \\ C - c &= \gamma, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ L - l &= \lambda. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la première égalité par $BC\dots L$, ceux de la seconde par $aC\dots L$, la troisième par $abD\dots L, \dots$, enfin de la dernière par $bc\dots, k$, ce qui donne

$$\begin{aligned} ABC\dots L - aBC\dots L &= \alpha BC\dots L, \\ aBC\dots L - abC\dots L &= \beta aC\dots L, \\ abC\dots L - abcD\dots L &= \gamma abD\dots L, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ abc\dots kL - abc\dots kl &= \gamma ab\dots k. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités on voit que les quantités intermédiaires se détruisent; il vient

$$ABC.....L - abc.....l = aBC.....L + \beta aC.....L + \dots$$

Chacun des produits $BC.....L$, $aC.....L$, ..., conservant une valeur finie, on voit que le second membre est la somme de m quantités qui tendent vers zéro; donc leur somme tend vers zéro, et le produit $ABC.....L$ a pour limite $abc.....l$.

Mais il est nécessaire pour que les propriétés subsistent que le nombre des parties de la somme ou le nombre des facteurs du produit soit fini. Soit, par exemple, la somme des m quantités

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \dots + \frac{a}{m};$$

chacune d'elles tend vers zéro quand m augmente indéfiniment; mais le nombre des parties devenant infiniment grand, on ne peut plus dire que la limite de la somme est la somme des limites, ce qui donnerait ici zéro; et en effet cette somme est égale à a .

De même l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ désigne le produit des m facteurs égaux à $1 + \frac{1}{m}$; chacun de ces facteurs devient égal à l'unité quand m augmente indéfiniment; la limite du produit n'est pas égale au produit des limites, c'est-à-dire à l'unité, parce que le nombre des facteurs devient infini. C'est cette limite que nous nous proposons de déterminer.

50. En développant la puissance $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binôme, il vient

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n = 1 + \frac{m}{1} \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} \frac{1}{m^n} + \dots$$

Remarquons que dans chaque terme l'exposant de m est égal au nombre des facteurs du numérateur; on divisera donc par cette puissance de m , en divisant par m chaque facteur du numérateur; on a ainsi

$$(1) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1.2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1.2.3} \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{1.2\dots n} + R.$$

Nous avons écrit les $n+1$ premiers termes du développement, et nous avons appelé R la somme des termes suivants.

Comparons ce développement à la série connue (n° 30),

$$(2) e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \dots + \frac{1}{1.2\dots n} + R',$$

dont nous écrivons également les $n+1$ premiers termes, appelant R' la somme des termes suivants. Il est visible que les termes du développement (1) sont moindres que les termes correspondants de la série (2), puisque les dénominateurs sont les mêmes de part et d'autre, et que les numérateurs des premiers sont inférieurs à l'unité. Pour cette raison, et aussi parce que dans R il y a un nombre fini de termes, tandis que dans R' il y a un nombre infini, on conclut que R est inférieur à R' .

Laissant n fixe, supposons que m augmente indéfini-

ment, le développement (1) contenant un nombre fini de termes, savoir $n+2$, en vertu du lemme I, la limite de la somme égale la somme des limites de ces différents termes. Le numérateur du troisième terme a évidemment pour limite l'unité; de même celui du quatrième; en général le numérateur d'un terme quelconque, étant le produit d'un nombre fini de facteurs dont chacun se réduit à l'unité, a pour limite, en vertu du lemme II, le produit des limites de ces différents facteurs, c'est-à-dire l'unité. On a donc

$$(3) \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2\dots n} + \lim R$$

Le reste R étant inférieur à R' , quelque grand que soit m , la limite de R' sera au plus égale à R . Dans l'expression (3), qui est tout à fait indépendante de m , nous pouvons maintenant supposer que n devienne de plus en plus grand; alors le second membre se prolongera de plus en plus; la quantité $\lim R$, qui est au plus égale à R' , tend vers zéro; on obtiendra donc la série elle-même. On a ainsi

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

Il résulte de là que la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est le nombre incommensurable e que nous avons appris à calculer.

51. L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la même limite, quand α tend vers zéro. Ceci est évident, si la quantité très-petite α est une fraction de la forme $\frac{1}{m}$, m étant un nombre en-

tier très-grand; car dans ce cas l'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$.

En général la quantité très-petite α sera comprise entre deux fractions de la forme $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m+1}$, et l'on aura

$$\frac{1}{m+1} < \alpha < \frac{1}{m}.$$

L'exposant $\frac{1}{\alpha}$ très-grand sera alors compris entre les deux nombres entiers consécutifs m et $m+1$, de manière que l'on ait

$$m < \frac{1}{\alpha} < m+1.$$

Si dans l'expression proposée $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ on remplace la quantité $1 + \alpha$ par la quantité plus grande $1 + \frac{1}{m}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$, par l'exposant plus grand $m+1$, on augmente évidemment la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Au contraire si l'on remplace la quantité $1 + \alpha$ par la quantité plus petite $1 + \frac{1}{m+1}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus petit m , on diminue la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou, par des transformations convenables,

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \times \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Lorsque la quantité α tend vers zéro, le nombre entier m augmente indéfiniment; chacune des quantités $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ et $\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ tend vers la limite e ; d'ailleurs le diviseur $1 + \frac{1}{m+1}$, de même que le multiplicateur $1 + \frac{1}{m}$, devient égal à l'unité. Les deux quantités extrêmes tendent ainsi vers la même limite e ; donc la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, qui est comprise entre elles, tend aussi nécessairement vers cette même limite.

Nous avons supposé dans ce qui précède la quantité α positive, supposons la maintenant négative; en mettant le signe en évidence, on a à considérer l'expression $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$. La quantité $1-\alpha$ moindre que l'unité, peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1+\alpha'}$, α' étant une quantité positive. De l'égalité

$$1-\alpha = \frac{1}{1+\alpha'},$$

on déduit

La première ligne horizontale renferme les coefficients de la première puissance du binôme $x + a$, la deuxième les coefficients du développement de $(x + a)^2$, la troisième ceux de $(x + a)^3$; en général la m^{e} ligne horizontale renferme les coefficients du développement de $(x + a)^m$, c'est-à-dire en mettant à part le premier coefficient 1, les nombres de combinaisons de m objets, pris 1 à 1, 2 à 2, etc.

En faisant abstraction de la colonne des unités, on voit que la première colonne verticale contient les nombres des combinaisons une à une de 1, 2, 3, ... objets, la seconde les nombres de combinaisons deux à deux de 2, 3, 4, ... objets; en général la n^{e} colonne (toujours abstraction faite de celle des unités que l'on ne compte pas) contient les nombres de combinaisons n à n de $n, n + 1, n + 2, \dots$ objets.

En un mot la m^{e} ligne horizontale renferme les nombres de combinaisons de m objets, la n^{e} colonne verticale les nombres de combinaisons n à n . Ainsi le nombre placé à l'intersection de la m^{e} ligne horizontale et de la n^{e} colonne verticale est C_m^n .

Chaque nombre du triangle arithmétique égale le nombre placé au-dessus de lui, plus le nombre placé à gauche de ce dernier. Ainsi le nombre 35 de la 7^e ligne égale le nombre 20 placé au-dessus de lui, plus le nombre 15 placé à gauche de 20. Ceci résulte de la relation

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

que nous avons démontrée n° 39; C_{m-1}^n est effectivement placé au-dessus de C_m^n dans la même colonne verticale, et C_{m-1}^{n-1} est placé à gauche de C_m^n dans la même ligne horizontale.

Cette propriété sert à la formation du tableau : suppo-

sons écrites les trois premières lignes, on dira 3 et 1 font 4, 3 et 3 font 6, 1 et 3 font 4; écrivant à la suite l'unité, on aura la quatrième ligne. On dira de même 4 et 1 font 5, 6 et 4 font 10, 4 et 6 font 10, 1 et 4 font 5, et l'on écrira à la suite l'unité, ce qui donne la cinquième ligne, et ainsi de suite. Chaque ligne horizontale se déduit de la ligne précédente.

53. THÉORÈME. *La somme des m premiers nombres d'une colonne verticale quelconque est le m^{e} nombre de la colonne suivante.*

En d'autres termes le m^{e} nombre d'une colonne verticale quelconque est la somme des m premiers nombres de la colonne précédente; ceci résulte de la loi de formation du tableau. Considérons, par exemple, le nombre 56, sixième nombre de la troisième colonne (on fait toujours abstraction de la colonne des unités); ce nombre égale 21 plus 35, mais 35 égale 15 plus 20, 20 égale 10 plus 10, 10 égale 6 plus 4, 4 égale 3 plus 1; on a donc

$$56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1;$$

donc ce nombre 56 est la somme des six premiers nombres de la deuxième colonne.

A l'inspection du tableau on voit que le premier nombre de la n^{e} colonne verticale se trouve dans la n^{e} ligne horizontale; le second dans la $n + 1^{\text{e}}$, le troisième dans la $n + 2^{\text{e}}$. En général le m^{e} nombre de la n^{e} colonne verticale se trouve dans la $m + n - 1$ ligne horizontale; c'est donc

$$C_{m+n-1}^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2) \dots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

ou

$$(1) \quad C_{m+n-1}^n = \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Pile triangulaire.

54. Considérons un triangle équilatéral formé de boulets disposés comme l'indique la figure. La première ligne contient 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, ... la dernière m . Le nombre total des boulets contenus dans le triangle est la somme des m premiers nombres de la première colonne verticale du triangle arithmétique; cette somme est le m^{e} nombre de la seconde colonne, soit, en faisant $n = 2$ dans la formule (1),



$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}.$$

Ainsi les nombres 1, 5, 6, ... de la deuxième colonne verticale du triangle arithmétique sont les nombres dits *triangulaires*, c'est-à-dire les nombres de boulets contenus dans les triangles équilatéraux ayant 1, 2, 3, ... boulets de côtés.

Une pile de boulets triangulaire a pour base un triangle équilatéral ayant m boulets de côté; sur la base est placé un autre triangle ayant $m - 1$ boulets de côté; sur celui-ci un triangle ayant $m - 2$ boulets de côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet qui est formé d'un seul boulet. Si l'on descend du sommet à la base, on voit que la pyramide se compose des m premiers nombres triangulaires, lesquels sont inscrits dans la deuxième colonne verticale du triangle de Pascal; le nombre total des boulets contenus dans la pyramide est la somme des m premiers nombres de cette deuxième colonne verticale; cette somme est le m^{e} nombre

de la troisième colonne, ou, en faisant $n = 5$ dans la formule (1),

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Par exemple, si la pyramide a 8 boulets de côté à la base, elle renferme $\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ou 120 boulets.

55. Considérons une pyramide ayant pour base un carré de m boulets au côté; sur la base est placé un autre carré ayant $m - 1$ boulets au côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet formé d'un seul boulet. La pyramide est la somme des carrés des m premiers nombres entiers. On peut décomposer le carré de base, comme l'indique la figure, en deux triangles équilatéraux ayant, le premier m boulets au côté, le second $m - 1$; si l'on imagine chaque carré décomposé de la même manière, on voit que la pyramide carrée est la réunion de deux pyramides triangulaires ayant, la première m boulets au côté de base, la seconde $m - 1$. Le nombre de boulets contenus dans la pyramide carrée est donc la somme des nombres de boulets



$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

contenus dans les deux pyramides triangulaires, soit, en simplifiant,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Cette formule exprime la somme des carrés des m pre-

miers nombres entiers. Par exemple, la somme des carrés des 10 premiers nombres entiers est 385.

Pile à base rectangulaire.

56. Imaginons une pile ayant pour base un rectangle de m boulets d'un côté sur n de l'autre, m étant plus grand que n ; sur la base est placé un rectangle de $m - 1$ bou-



lets sur $n - 1$; et ainsi de suite; la pile se termine, non plus par un boulet isolé, mais par une ligne ou arête de $m - n + 1$ boulets. Nous pouvons décomposer le rec-

tangle de base mn en un carré n^2 ayant n boulets de côté et un rectangle $(m-n)n$ ayant $m-n$ boulets d'un côté sur n de l'autre; de même le rectangle $(m-1)(n-1)$ placé au-dessus se décomposera en un carré $(n-1)^2$ et un rectangle $(m-n)(n-1)$; le rectangle suivant en un carré $(n-2)^2$ et un rectangle $(m-n)(n-2)$, et ainsi de suite. Un rectangle quelconque $(m-k)(n-k)$ se décomposera en un carré $(n-k)^2$ et un rectangle $(m-n)(n-k)$; et il est à remarquer que ce second rectangle a un côté constant $m-n$ comme étant la différence des deux côtés $m-k$ et $n-k$ du premier. La pile rectangulaire se compose ainsi d'une pyramide carrée ayant n boulets de côté à la base et d'une somme de rectangles

$$(m-n)_1 + (m-n)_2 + (m-n)_3 \dots \dots \dots + (m-n)_n;$$

la pyramide carrée contient

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

boulets, comme on l'a vu précédemment; pour évaluer la

somme des rectangles on mettra $m - n$ en facteur commun, ce qui donne

$$(m - n)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{(m - n)n(n + 1)}{2}.$$

En ajoutant ce nombre au précédent et simplifiant, on trouve pour le nombre des boulets contenus dans la pile rectangulaire

$$\frac{n(n + 1)(3m - n + 1)}{6}.$$

57. Comme dernière application du triangle arithmétique, cherchons la somme des cubes des m premiers nombres

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3.$$

Un cube quelconque m^3 peut s'écrire

$$\begin{aligned} m^3 &= m(m^2 - 1) + m = (m - 1)m(m + 1) + m \\ &= 6 \frac{(m - 1)m(m + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + m. \end{aligned}$$

Le nombre $\frac{(m - 1)m(m + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ est le $m - 1^{\text{er}}$ nombre de la troisième colonne verticale du triangle arithmétique. La somme des cubes des m premiers nombres égale donc six fois la somme des $m - 1$ premiers nombres de la troisième colonne, plus la somme des m premiers nombres. La somme des $m - 1$ premiers nombres de la troisième colonne est le $m - 1^{\text{er}}$ nombre de la quatrième colonne, soit en remplaçant m par $m - 1$ et n par 4 dans la formule (1)

$$\frac{(m - 1)m(m + 1)(m + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

On a ainsi pour la somme des cubes des m premiers nombres

$$\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Il en résulte que la somme des cubes des m premiers nombres égale le carré de la somme de ces m premiers nombres.

CHAPITRE IV.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS USAGES.

EN FORMANT TOUTES LES PUISSANCES D'UN NOMBRE QUELCONQUE POSITIF, PLUS GRAND OU PLUS PETIT QUE 1, ON PEUT REPRODUIRE TOUS LES NOMBRES.

58. LEMME I. *Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et deviennent plus grandes que toute quantité donnée.*

Soit a une quantité positive supérieure à l'unité. On voit d'abord que ses puissances successives vont en croissant, car on obtient a^{m+1} en multipliant a^m par a ; le multiplicateur a étant plus grand que l'unité, le produit a^{m+1} est plus grand que le multiplicateur a^m .

Posons $a = 1 + \alpha$; je dis que la différence entre deux puissances successives est plus grande que α ; car on a

$$a^{m+1} - a^m = a^m(a - 1) = a^m\alpha;$$

le multiplicateur a^m étant supérieur à l'unité, la quantité $a^m\alpha$ est plus grande que α .

Si l'on ajoute les inégalités

$$a - 1 = \alpha$$

$$a^2 - a > \alpha$$

$$a^3 - a^2 > \alpha$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^m - a^{m-1} > \alpha,$$

il vient

$$a^m - 1 > m\alpha$$

ou

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Pour rendre la puissance a^m plus grande qu'une quantité donnée A , il suffit évidemment de rendre la quantité $1 + m\alpha$ plus grande que cette quantité; on déterminera donc l'exposant m de manière à satisfaire à l'inégalité

$$1 + m\alpha > A;$$

d'où

$$m > \frac{A-1}{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque l'exposant m surpasse $\frac{A-1}{\alpha}$, il est certain que la puissance a^m devient supérieure à la quantité A , quelque grande qu'elle soit. Donc les puissances du nombre a augmentent indéfiniment.

Soit, par exemple, $a = 1,1$; on peut affirmer que a^m surpassera 1000 si m est plus grand que $\frac{999}{0,1}$ ou que 9990. Mais on n'a pas ainsi les plus petites puissances de a supérieures à 1000.

59. LEMME II. *Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et deviennent plus petites que toute quantité donnée.*

Le nombre a , étant inférieur à l'unité, peut être représenté par $\frac{1}{1+\alpha}$, et l'on a

$$a^m = \frac{1}{(1+\alpha)^m}.$$

Quand l'exposant m croît indéfiniment, le dénominateur augmentant indéfiniment, la fraction diminue et tend vers zéro.

60. LEMME III. *La racine d'un nombre supérieur à l'unité est supérieure à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.*

Soit a un nombre supérieur à l'unité. Je dis d'abord que $\sqrt[n]{a}$ surpasse l'unité; car un nombre plus petit que l'unité, élevé à la n° puissance, ne pourrait reproduire le nombre a plus grand que l'unité. Nous voulons rendre $\sqrt[n]{a}$ inférieure à $1+\alpha$, α étant une quantité donnée très-petite; il s'agit donc de satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \alpha,$$

ou à la suivante

$$(1 + \alpha)^n > a.$$

Or, en vertu du lemme I, quelque petit que soit α , on peut toujours prendre l'exposant n assez grand pour que $(1 + \alpha)^n$ surpasse a .

On veut, par exemple, que $\sqrt[2]{2}$ diffère de l'unité de moins

de 0,001. On prendra n plus grand que $\frac{2-1}{0,001}$, c'est-à-dire plus grand que 1000.

COROLLAIRE. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus grand que l'unité est plus grande que l'unité. Car $a^{\frac{n}{m}}$ signifie $\sqrt[m]{a^n}$; le nombre a étant supérieur à l'unité, sa puissance a^m est supérieure à l'unité et la racine de cette dernière quantité est aussi supérieure à l'unité.*

61. LEMME IV. *Les racines d'un nombre inférieur à l'unité sont inférieures à l'unité et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité plus petite que toute quantité donnée.*

Si le nombre a est inférieur à l'unité, $\sqrt[n]{a}$ sera aussi inférieur à l'unité; car un nombre supérieur à l'unité, élevé à la n^{e} puissance, ne pourrait reproduire le nombre a inférieur à l'unité; d'autre part, le nombre a , inférieur à l'unité, peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, et l'on a

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}.$$

Le dénominateur tendant vers l'unité, quand l'indice n du radical augmente indéfiniment, la fraction tend elle-même vers l'unité.

COROLLAIRE. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus petit que l'unité est plus petite que l'unité.*

62. THÉOREME. *La fonction a^x varie d'une manière continue quand x croît d'une manière continue.*

On appelle *fonction* en mathématiques une expression qui contient une lettre désignant une quantité variable.

L'expression $2x^2 - 4x + 5$ est une fonction entière de la variable x . L'expression a^x est une fonction *exponentielle* de x ; on la nomme ainsi parce que la variable x est en exposant.

Nous supposons le nombre a positif et plus grand que l'unité. Je dis d'abord que lorsque la variable x croît, la fonction a^x croît. En effet, si l'on donne à la variable x un accroissement très-petit h , la fonction devient a^{x+h} , et éprouve une variation marquée par

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Mais a^h est supérieure à l'unité parce que toute puissance d'un nombre a supérieur à l'unité est elle-même supérieure à l'unité; donc la différence $a^{x+h} - a^x$ est positive, et par suite a^{x+h} est plus grande que a^x . Ainsi, quand a est plus grand que l'unité, la fonction a^x croît en même temps que la variable x .

Je dis maintenant que l'on peut donner à la variable x un accroissement h assez petit pour que la fonction a^x éprouve un accroissement plus petit que toute quantité donnée α . En effet, supposons h plus petit qu'une fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n étant un entier très-grand; en vertu du lemme III, on peut prendre n assez grand pour que $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ diffère de l'unité d'une quantité plus petite que $\frac{\alpha}{a^x}$; la quantité a^h , étant moindre que $a^{\frac{1}{n}}$ puisque h est inférieur à $\frac{1}{n}$, différera de l'unité d'une quantité encore plus petite, et la différence $a^{x+h} - a^x$ sera moindre que $a^x \times \frac{\alpha}{a^x}$ ou que α . Ainsi l'accroissement de la fonction peut être rendu plus

petit que toute quantité donnée ; en d'autres termes, lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro, celui de la fonction tend aussi vers zéro.

On dit qu'une grandeur varie d'une manière continue lorsqu'elle ne peut aller d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est *continue* lorsqu'à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction ; car si la fonction sautait brusquement d'une valeur à une autre, elle éprouverait une variation finie pour une variation infiniment petite de la variable.

Il résulte de ce qui précède que lorsque la variable x croît d'une manière continue, la fonction exponentielle a^x croît aussi d'une manière continue.

Nous avons supposé le nombre positif a plus grand que l'unité. Supposons-le maintenant plus petit, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité. On a

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Lorsque x croît d'une manière continue, a^x croît, et par conséquent a^x décroît, d'une manière continue.

63. COROLLAIRE. Voyons maintenant les valeurs par lesquelles passe la fonction exponentielle a^x quand on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons d'abord a supérieur à l'unité, et faisons croître x de 0 à $+\infty$; pour $x = 0$, on a $a^0 = 1$; quand x est infiniment grand, en vertu du lemme I, a^x est aussi infiniment grand ; ainsi, quand x croît de 0 à $+\infty$, la fonction a^x croît de 1 à $+\infty$. Faisons maintenant décroître x

de 0 à $-\infty$, et pour cela, posons $x = -x'$, x' étant positive; on a

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de 0 à $+\infty$, $a^{x'}$ croît de 1 à $+\infty$, et par conséquent a^x décroît de 1 à 0. En résumé, lorsque la variable x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant supérieur à l'unité, la fonction a^x croît d'une manière continue de 0 à $+\infty$. Il est à remarquer que la fonction passe par toutes les valeurs positives et qu'elle ne passe qu'une fois par chacune d'elles, puisqu'elle va constamment en augmentant.

Considérons maintenant le cas où le nombre a est inférieur à l'unité, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, ce qui donne

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

On voit que lorsque x croît de 0 à $+\infty$, a'^x croissant de 1 à $+\infty$, a^x décroît de 1 à 0, et que, lorsque x décroît de 0 à $-\infty$, a'^x décroissant de 1 à 0, a^x croît de 1 à $+\infty$. Ainsi, quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant inférieur à l'unité, la fonction a^x décroît d'une manière continue de $+\infty$ à 0. La fonction passe encore par toutes les valeurs positives et une seule fois par chacune d'elles.

64. REMARQUE. Nous pouvons maintenant donner d'une manière très-nette la signification de l'exposant incommensurable dont nous avons déjà dit quelques mots (n° 17). Soit $a^{\sqrt{2}}$, et pour préciser, supposons a supérieur à l'u-

nité; le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ est la limite commune de deux nombres fractionnaires $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut, et dont les carrés comprennent 2; en remplaçant $\sqrt{2}$ par ces nombres approchés, on obtiendra deux séries de puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, les premières plus petites que les secondes, et telles que leur différence peut être rendue plus petite que toute quantité donnée; il existe donc entre ces deux séries de grandeurs une grandeur déterminée qui en est la limite commune; c'est cette limite que désigne $a^{\sqrt{2}}$.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES LOGARITHMES.

Définition.

65. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre positif constant a pour reproduire le nombre proposé.

Nous avons vu que lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par toutes les valeurs positives et ne passe qu'une fois par chacune d'elles; il en résulte que tous les nombres positifs ont des logarithmes, et que chacun d'eux n'a qu'un logarithme. Si le nombre constant a est supérieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes négatifs. Si a était inférieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité auraient au contraire des logarithmes négatifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes positifs. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

Nous désignerons le logarithme d'un nombre par la notation *log*.

Les logarithmes jouissent de propriétés très-remarquables que nous allons démontrer.

66. THÉORÈME I. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Soient deux nombres y et y' dont nous appellerons x et x' les logarithmes ; d'après la définition même des logarithmes, on a

$$\begin{aligned} a^x &= y, \\ a^{x'} &= y'. \end{aligned}$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient

$$a^{x+x'} = yy'.$$

L'exposant $x + x'$ est le logarithme du produit yy' ; on a donc

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs. Soient trois nombres y, y', y'' ayant pour logarithmes x, x', x'' ; on a de même

$$\begin{aligned} a^x &= y, \\ a^{x'} &= y', \\ a^{x''} &= y'', \end{aligned}$$

et, en multipliant,

$$a^{x+x'+x''} = yy'y'';$$

donc

$$\log(yy'y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

67. THÉORÈME II. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

En divisant membre à membre les deux égalités

$$a^x = y,$$

$$a^{x'} = y',$$

on a

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'exposant $x - x'$ est le logarithme du quotient $\frac{y}{y'}$. Donc

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

68. THÉOREME III. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Si l'on élève à la m^e puissance (m étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif), les deux membres de l'égalité

$$a^x = y,$$

il vient

$$a^{mx} = y^m.$$

Donc

$$\log (y^m) = m \log y.$$

69. THÉOREME IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème précédent; car $\sqrt[n]{y}$ s'écrit $y^{\frac{1}{n}}$ et l'on a

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

L'emploi des logarithmes simplifie beaucoup les calculs numériques ; car la multiplication est remplacée par une addition, la division par une soustraction, l'élevation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division.

LORSQUE DES NOMBRES SONT EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE ,
LEURS LOGARITHMES SONT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

70. Car si l'on prend les logarithmes des termes d'une progression géométrique

$$a : ar : ar^2 : ar^3 : \dots ,$$

dont la raison est r , on forme évidemment une progression arithmétique

$$\log a . \log a + \log r . \log a + 2 \log r . \log a + 3 \log r . \dots$$

ayant pour raison $\log r$.

En arithmétique, on a coutume de définir les logarithmes par deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro

$$1 : a : a^2 : a^3 : \dots$$

$$0 . b . 2b . 3b . \dots$$

et l'on appelle logarithme d'un terme quelconque de la progression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique ; afin d'avoir les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation, on insère un grand nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, et le même nombre entre deux termes consécutifs de la progression arithmé-

tique. Il est aisé de voir que cette définition des logarithmes par les progressions revient à la définition que nous venons de donner par les exponentielles.

Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & : & a & : & a^2 & : & a^3 & : & \dots & \dots & \dots \\ 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Si l'on insère $n - 1$ moyens entre les termes consécutifs des deux progressions, la raison de la progression géométrique devient $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$, celle de la progression arithmétique $\frac{1}{n}$, en sorte que les deux progressions ainsi développées s'écrivent

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & : & a^{\frac{1}{n}} & : & a^{\frac{2}{n}} & : & a^{\frac{3}{n}} & : & \dots & \dots & : & a^{\frac{m}{n}} & : & \dots & \dots \\ 0 & . & \frac{1}{n} & . & \frac{2}{n} & . & \frac{3}{n} & . & \dots & \dots & . & \frac{m}{n} & . & \dots & \dots \end{array}$$

Sous cette forme, on voit qu'un nombre quelconque $a^{\frac{m}{n}}$ de la progression géométrique a pour logarithme l'exposant $\frac{m}{n}$ de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant a pour avoir le nombre proposé. La base a d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité.

COMMENT ON PASSE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES A UN AUTRE SYSTÈME. LOGARITHMES NÉPÉRIENS. LOGARITHMES VULGAIRES. CE QU'ON APPELLE MODULE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

71. La base d'un système de logarithmes est un nombre positif constant, que l'on peut choisir à volonté. Suppo-

sons que l'on ait calculé les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a , et que l'on veuille les calculer dans un autre système ayant pour base a' . Appelons x le logarithme d'un nombre quelconque y dans le premier système, x' le logarithme du même nombre dans le second système, on aura

$$a^x = y, \quad a'^{x'} = y;$$

d'où

$$a^x = a'^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité dans le premier système, en remarquant que le logarithme de a est l'unité, il vient

$$x = x' \log a',$$

d'où

$$x' = \frac{1}{\log a'} x.$$

Ainsi les logarithmes des mêmes nombres dans les deux systèmes sont proportionnels, et l'on a la règle suivante : *pour passer d'un système de logarithme à un autre, il suffit de multiplier les logarithmes du premier système par l'inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans le premier système.*

72. Les logarithmes ont été inventés au commencement du XVII^e siècle par l'Écossais Néper, qui prit pour base le nombre incommensurable $e = 2,7182818\dots$; les logarithmes de ce système ont été appelés logarithmes *hyperboliques*, ou, du nom de l'inventeur, logarithmes *népériens*. Ce sont ceux-là qui se présentent naturellement dans l'analyse mathématique; on les désigne ordinairement par la lettre L .

Mais les logarithmes népériens ne sont pas commodes pour les calculs numériques parce qu'il ne sont pas en harmonie avec notre numération décimale. C'est pourquoi *Briggs*, contemporain de Néper, proposa de remplacer la base e par la base dix de notre système de numération. Ce sont les logarithmes de Briggs dont on fait habituellement usage dans les calculs numériques; on les a nommés pour cette raison *logarithmes vulgaires*; nous les désignerons par le signe *log*.

On appelle *module* d'un système de logarithmes le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour avoir les logarithmes du système considéré. Soit a la base du système de logarithmes; d'après ce qui a été dit précédemment, son module M sera

$$M = \frac{1}{La},$$

c'est à dire l'inverse du logarithme népérien de la base. Le module des logarithmes vulgaires est $M = 0,434294482 \dots$

Lorsqu'on passe d'un système dont la base est a à un système dont la base est a' , le multiplicateur constant $\frac{1}{\log a}$ s'appelle *module relatif* du premier système au second.

73. Il est bon de faire voir pourquoi Néper a choisi le nombre incommensurable e pour base de son système de logarithmes. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & : & (1 + \alpha) & : & (1 + \alpha)^2 & : & (1 + \alpha)^3 & : & \dots \\ 0 & . & \beta & . & 2\beta & . & 3\beta & . & \dots \end{array}$$

dans lesquelles α et β sont des quantités très-petites, afin que les termes des deux progressions croissent par degrés très-petits, et que l'on ait ainsi les logarithmes de tous les

nombres avec une grande approximation. Néper appelait module des logarithmes définis par ces deux progressions le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, ou plutôt la limite de ce rapport, quand α et β tendent simultanément vers zéro, et il distinguait chaque système de logarithmes par son module. L'idée lui vint alors d'adopter le système dont le module est l'unité, celui qu'il regardait comme le plus simple. Si l'on fait $\beta = \alpha$, les deux progressions deviennent

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & : & 1 + \alpha & : & (1 + \alpha)^2 & : & (1 + \alpha)^3 & : & \dots\dots \\ 0 & . & \alpha & . & 2\alpha & . & 3\alpha & . & \dots\dots \end{array}$$

Telles sont les deux progressions par lesquelles Néper définissait son système de logarithmes. Calculons la base de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme l'unité; soit $m\alpha$ le terme de la progression arithmétique qui est égal à l'unité, le terme correspondant de la progression géométrique est $(1 + \alpha)^m$; puisque $m\alpha = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m}$ et $(1 + \alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; lorsque α tend vers zéro, m augmente indéfiniment, et le nombre $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e qui est la base des logarithmes népériens.

USAGE DES LOGARITHMES VULGAIRES. — CARACTÉRISTIQUES. —
CARACTÉRISTIQUES NÉGATIVES.

Caractéristiques.

74. Dans un système quelconque les puissances de la base $a^1, a^2, a^3, \dots$ ont évidemment pour logarithmes les

nombres entiers 1, 2, 3..... Dans le système vulgaire, ce sont les puissances de 10, savoir 10, 100, 1000,..... qui ont pour logarithmes les nombres entiers successifs. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*. Il est aisé de voir que la *caractéristique du logarithme vulgaire d'un nombre renferme autant d'unités qu'il y a de chiffres moins un dans la partie entière de ce nombre*. En effet, tout nombre compris entre 1 et 10 n'a qu'un chiffre à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 0 et 1, aura 0 pour partie entière ou pour caractéristique. Tout nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 1 et 2, a 1 pour partie entière ou pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 100 et 1000 a trois chiffres à sa partie entière, et son logarithme, étant compris entre 2 et 3, a 2 pour caractéristique. En général tout nombre compris entre 10^m et 10^{m+1} a $m+1$ chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre m et $m+1$, a m unités à la caractéristique.

Le logarithme de 10^m est m . Ou a

$$\log(a \times 10^m) = \log a + \log 10^m = \log a + m;$$

de même

$$\log \frac{a}{10^m} = \log a - m.$$

Ainsi, pour multiplier ou pour diviser un nombre par 10^m , il suffit d'ajouter ou de retrancher m unités à la caractéristique du logarithme.

Il en résulte que lorsque deux nombres décimaux ne diffèrent que par la place qu'occupe la virgule, leurs logarithmes ont même partie décimale et ne diffèrent que par la

caractéristique. Ceci est important pour la facilité des calculs parce qu'on a souvent à déplacer la virgule dans les nombres décimaux.

Caractéristiques négatives.

75. Les nombres plus petits que l'unité ont leurs logarithmes négatifs ; les logarithmes négatifs étant incommodes dans la pratique , on leur substitue des logarithmes qui ont leur partie décimale positive et leur caractéristique seulement négative. Soit le nombre 0,05564 plus petit que l'unité ; son logarithme est négatif et a pour valeur

$$-1,5519377.$$

Écrivons ce logarithme de la manière suivante

$$-2 + 1 - 0,5519377 = -2 + 0,4480623,$$

ou plus simplement

$$2,4480623.$$

Sous cette forme le logarithme a sa partie décimale positive ; le signe — , placé au-dessus de la partie entière , indique que la caractéristique seule est négative. *La caractéristique négative du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité renferme un nombre d'unités marqué par le rang du premier chiffre significatif , à partir de la virgule.* En effet , soit m le rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule dans le nombre proposé a ; le produit $a \times 10^m$ étant compris entre 1 et 10, son logarithme a zéro pour caractéristique , avec une partie décimale positive ; pour revenir au nombre a il faut diviser par 10^m , c'est-à-dire retrans-

cher m du logarithme ; le logarithme de a aura donc une caractéristique négative $\overline{m}$, suivie d'une partie décimale positive.

Tables de Callet.

76. Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000. La première partie de la table, nommée première *chiliade* (premier mille), contient à la suite les uns des autres les logarithmes des 1200 premiers nombres avec huit décimales. La table change ensuite de disposition, et donne les logarithmes des nombres de 10200 à 100000 avec sept décimales ; à la fin, la table se prolonge de 100000 à 108000 avec huit décimales. Dans la colonne verticale intitulée N on lit les dizaines des nombres ; les unités sont inscrites au haut de la page et en tête des dix colonnes intitulées 0, 1, ..., 2, 8, 9. La caractéristique n'est pas indiquée, il est facile de l'ajouter d'après la règle énoncée. Dans la colonne voisine on trouve les trois premiers chiffres décimaux de chaque logarithme ; les quatre suivants sont inscrits dans la colonne convenable. Si l'on veut par exemple le logarithme du nombre 35647, dans la colonne verticale intitulée N, on descendra jusqu'au nombre 3564 ; puis, sur la même ligne horizontale, on s'avancera vers la droite jusqu'à la colonne verticale intitulée 7, et l'on écrira

$$\log 35647 = 4,5520230.$$

Le nombre ayant cinq chiffres à sa partie entière, on commencera par écrire sa caractéristique 4 ; les trois premiers chiffres décimaux 552 sont communs à un assez grand nombre de logarithmes ; on trouve les quatre suivants 0230 dans la colonne verticale intitulée 7.

Pour effectuer des calculs par logarithmes, il faut savoir résoudre les deux questions suivantes : 1° trouver le logarithme d'un nombre donné ; 2° trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné.

UN NOMBRE ÉTANT DONNÉ, TROUVER SON LOGARITHME PAR LE MOYEN DES TABLES DE CALLET. — UN LOGARITHME ÉTANT DONNÉ, TROUVER LE NOMBRE AUQUEL IL APPARTIENT. — USAGE DES PARTIES PROPORTIONNELLES.

Trouver le logarithme d'un nombre donné.

77. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un nombre entier. Si le nombre est plus petit que 108000, on trouve immédiatement son logarithme dans les tables de Callet ; s'il est plus grand que 108000, on le ramène dans les limites des tables en le divisant par une puissance convenable de 10.

Exemples. 1° On demande le logarithme du nombre 356478. Pour ramener ce nombre dans les limites des tables, il suffit de le diviser par 10, et la question revient à considérer le nombre décimal 35647,8. Les tables donnent directement le logarithme de la partie entière 35647,

$$\log 35647 = 4,5520230.$$

La différence entre les logarithmes des nombres entiers consécutifs 35647 et 35648 est de 122 unités du septième ordre décimal, c'est-à-dire que si l'on augmentait le nombre 35647 d'une unité, il faudrait ajouter 122 unités du septième ordre décimal à son logarithme. Les accroissements du logarithme ne sont pas proportionnels à ceux du nombre ; mais quand il s'agit d'accroissements plus petits

que l'unité, et par conséquent très-petits par rapport au nombre lui-même, on peut admettre la proportion sans erreur sensible. On dira donc : puisque pour une augmentation d'une unité dans le nombre 35647, il faut ajouter 122 au logarithme, pour une augmentation de 0,8 dans le nombre, il faudra ajouter au logarithme les $\frac{8}{10}$ de 122, soit 98 unités du septième ordre en négligeant les unités plus petites. On trouve cette augmentation toute calculée dans les tables de Callet ; car dans la dernière colonne verticale à droite on voit au-dessous de la différence 122, un petit tableau indiquant les augmentations du logarithme qui correspondent à 1, 2, 3, ... 9 dixièmes. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \log 35647 & = & 4,5520230 \\ \text{pour } 0,8 & & 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 35647,8 & = & 4,5520328 \\ \log 356478 & = & 5,5520338 \end{array}$$

2° Trouver le logarithme du nombre 2543246. En divisant par 100, on ramène le nombre proposé au nombre décimal 25432,46. La table donne le logarithme de la partie entière ; on trouve dans le petit tableau des différences l'augmentation qui correspond à 0,4 ; en prenant la dixième partie de celle qui correspond à 0,6 on obtient celle qui correspond à 0,06. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \log 25432 & = & 4,4053805 \\ \text{pour } 0,4 & & 68 \\ & & 0,06 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 25432,46 & = & 4,4053883 \\ \log 2543246 & = & 6,4053883 \end{array}$$

3° Trouver le logarithme du nombre 317562375; en divisant ce nombre par 10^4 , on le ramènera au nombre décimal 31756,2375, et l'on aura

$$\log 31756 = 4,5018258$$

$$\text{pour } 0,2 \quad 27$$

$$0,03 \quad 4$$

$$0,007 \quad 1$$

$$\log 31756,237 = 4,5018290$$

$$\log 317562375 = 8,5018290$$

Il est à remarquer que dans le calcul de l'augmentation du logarithme, on doit tenir compte seulement des trois premiers chiffres décimaux du nombre proposé; on néglige les suivants comme n'ayant pas d'influence sur les sept premiers chiffres décimaux du logarithme.

4° Trouver le logarithme du nombre décimal 35,6478. Multiplions par 1000 et cherchons le logarithme du nombre 35647,8; nous retrancherons ensuite 3 unités de la caractéristique.

$$\log 35647 = 4,5520230$$

$$\text{pour } 0,8 \quad 98$$

$$\log 35647,8 = 4,5520328$$

$$\log 35,6478 = 1,5520328$$

En général on multipliera ou on divisera le nombre décimal proposé par une puissance de 10, telle qu'il devienne plus grand que 10800, mais plus petit que 108000.

5° Trouver le logarithme du nombre décimal 3,17562375. En multipliant par 10^4 , le nombre proposé, on le ramène à 31756,2375.

$$\log 31756,2375 = 4,5018290$$

$$\log 3,17562375 = 0,5018290$$

6° Trouver le logarithme de la fraction décimale 0,00356478. En multipliant par 10^3 on ramènera cette fraction au nombre décimal 35647,8, et l'on a

$$\log 35647,8 = 4,5520328$$

$$\log 0,00356478 = 3,5520328$$

*Trouver le nombre auquel appartient
un logarithme donné.*

78. Soit à trouver le nombre auquel appartient le logarithme 4,5743525. On cherche dans la table le plus grand logarithme inférieur au logarithme donné; c'est 4,5743438 qui correspond au nombre 37527; le nombre cherché est donc compris entre 37527 et 37528. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 37527 de 87 unités du septième ordre décimal: or la différence tabulaire est 116, c'est-à-dire que si l'on augmentait le logarithme de 37527 de 116 unités du dernier ordre, il faudrait augmenter d'une unité le nombre 37527. Nous admettrons comme précédemment que les augmentations du nombre sont à peu près proportionnelles à celles du logarithme. Le petit tableau placé à droite, au-dessous de la différence 116, montre qu'à une augmentation 81 dans le logarithme correspond une augmentation de 0,7 dans le nombre. Il reste encore 6 unités d'augmentation dans le logarithme; à l'augmentation dix fois plus grande 60 du logarithme correspond une augmentation d'à peu près 0,5 dans le nombre; à 6 correspondra par conséquent une augmentation dix fois plus petite, soit 0,05. Ainsi le nombre cherché est 37537,75 à moins d'un centième près. On écrit l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 4,5743525 \\ \log 37527 & = & 4,5743438 \end{array}$$

	87
pour 0,7	81
0,05	6
$x = 37527,75$	

On procédera dans tous les cas de la même manière, en supposant que le logarithme donné ait pour caractéristique 4, et mettant ensuite dans le nombre la virgule à la place convenable. Voici quelques exemples :

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 5,6892746 \\ \log 48896 & = & 4,6892755 \end{array}$$

	13
0,1	9
0,04	4
$x = 488961,4$	

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 1,2588467 \\ \log 18148 & = & 4,2588288 \end{array}$$

	179
0,7	167
0,05	12
$x = 18,14875$	

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 2,02436275 \\ \log 105770 & = & 5,02456250 \end{array}$$

0,06	25
$x = 0,010577006$	

Dans ce dernier exemple, le logarithme se trouvant dans

la dernière partie de la table, on a pris 5 pour caractéristique.

Voyez dans la première partie de l'algèbre, du n° 209 au n° 213, quelques remarques utiles sur l'emploi des caractéristiques négatives.

USAGE DE LA RÈGLE A CALCUL.

Je renvoie le lecteur aux notices spéciales qui accompagnent les règles à calcul.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES AU MOYEN DES LOGARITHMES.

79. On appelle équation *exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités positives données, l'exposant x l'inconnue qui doit vérifier l'égalité. Il est facile de résoudre une semblable équation au moyen des logarithmes. Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation, on a

$$x \log a = \log b;$$

d'où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemples.

$$4^x = 7^x = 1254$$

$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,84509804} = 3,666197.$$

$$2^0 \quad 3^x = 0,462$$

$$x = \frac{\log 0,462}{\log 3} = -0,762878.$$

On peut encore résoudre des équations exponentielles plus compliquées que la précédente. Soit l'équation

$$a^{b^x} = c,$$

dans laquelle le premier membre signifie que le nombre a est élevé à une puissance marquée par b^x , les trois lettres a, b, c , désignant d'ailleurs des nombres donnés positifs. En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$b^x \times \log a = \log c,$$

d'où

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

On est ramené ainsi à l'exponentielle ordinaire. Pour que la question soit possible, il faut que a et c soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à l'unité, afin que le second membre ait une valeur positive. Si l'on prend une seconde fois les logarithmes, on a

$$x \log b = \log \log c - \log \log a;$$

d'où

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

INTÉRÊTS COMPOSÉS. ANNUITÉS.

Voyez la première partie, n° 216 à 221.

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE h QUAND ON REMPLACE x PAR $x + h$. — DÉRIVÉE D'UNE FONCTION ENTIÈRE.

80. Considérons un polynôme entier par rapport à x ,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \dots + A_{m-1}x + A_m,$$

dans lequel les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$, sont des constantes, x une variable. Pour abréger nous représenterons ce polynôme par le symbole $f(x)$ que l'on énonce *fonction de x* , et qui nous servira plus tard à désigner une fonction quelconque de x .

Si l'on remplace la variable x par $x + h$, il vient ●

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} \dots \\ \dots + A_{m-1}(x+h) + A_m,$$

et, en développant chaque terme suivant la loi du binôme,

$$\begin{array}{l|l|l} +A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & \frac{h}{1} + m(m-1)A_0x^{m-2} + \frac{h^2}{1.2} + \dots + mA_0x^{m-1} + A_0h^m \\ +A_1x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} & + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \dots + A_1 \\ +A_2x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} & + (m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\ \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \\ +A_{m-1}x & +A_{m-1} & \\ +A_m & & \end{array}$$

Dans la première colonne verticale nous retrouvons le polynôme proposé $f(x)$; dans la seconde colonne qui contient h en facteur se trouve un polynôme du degré $m-1$, que nous désignerons par $f'(x)$; de même nous représenterons par $f''(x), f'''(x), \dots$ les polynômes contenus dans les colonnes suivantes, et le développement s'écrira :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} + f'''(x) \frac{h^3}{1.2.3} \dots \dots \dots + f^{(m)}(x) \frac{h^m}{1.2 \dots \dots m}.$$

84. Le polynôme

$$f(x) = mA_0x^{n-1} + (m-1)A_1x^{n-2} + \dots + A_{m-1},$$

coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$, se nomme la *dérivée* du polynôme proposé. On la forme d'après cette règle très-simple : *Pour avoir la dérivée d'un polynôme entier, multipliez chaque terme par l'exposant de x dans ce terme, et diminuez ensuite cet exposant d'une unité.*

Le polynôme $f''(x)$, coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ dans le développement, se déduit du polynôme $f'(x)$ suivant la même loi; on l'appelle pour cette raison dérivée de la dérivée ou *dérivée seconde* du polynôme proposé.

Le polynôme $f'''(x)$ se déduit de même du polynôme $f''(x)$ suivant la loi ordinaire de dérivation ; c'est la dérivée de la dérivée seconde, ou la *dérivée troisième* du polynôme proposé, et ainsi de suite.

Le polynôme proposé étant du degré m , sa dérivée première est du degré $m - 1$, sa dérivée seconde du degré $m - 2$, sa dérivée troisième de degré $m - 3$, et ainsi de suite, chaque dérivation diminuant d'une unité le degré. La dérivée de l'ordre m est du degré zéro ; c'est une constante. Les dérivées suivantes sont nulles. Ainsi un polynôme du degré m a m dérivées.

Exemple.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 6.$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient les dérivés successives :

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 7,$$

$$f''(x) = 6x + 10,$$

$$f'''(x) = 6.$$

Il est à remarquer que le terme constant du polynôme proposé n'entre pas dans la dérivée ; que les deux derniers termes n'entrent pas dans la seconde dérivée, etc. Le premier terme entre seul dans la dernière dérivée.

LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION QUELCONQUE EST LA LIMITE VERS LAQUELLE TEND LE RAPPORT DE L'ACCROISSEMENT DE LA FONCTION A L'ACCROISSEMENT DE LA VARIABLE, LORSQUE CELUI-CI TEND VERS ZÉRO.

82. Nous avons trouvé que lorsque dans une fonction

entière $f(x)$ on donne à la variable x l'accroissement h , la fonction devient

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} \dots + f^{(m)}(x) \frac{h^m}{1.2\dots m}.$$

Elle éprouve une variation ou un accroissement

$$k = f(x+h) - f(x) = f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} \dots + f^{(m)}(x) \frac{h^m}{1.2\dots m}.$$

On appelle accroissement, en mathématiques, la variation d'une quantité, que cette variation soit positive ou négative. Si l'accroissement h de la variable est très-petit, l'accroissement k de la fonction est aussi très-petit, comme somme d'un nombre déterminé de quantités très-petites; si le premier tend vers zéro, le second tend aussi vers zéro. Ainsi à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction; on en conclut qu'une fonction entière par rapport à x varie d'une manière continue quand x varie d'une manière continue.

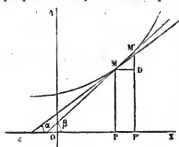
Prenons maintenant le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, nous aurons

$$\frac{k}{h} = f'(x) + f''(x) \frac{h}{1.2} \dots + f^{(m)}(x) \frac{h^{m-1}}{1.2\dots m}.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, k tend aussi vers zéro; mais on voit que leur rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une quantité déterminée $f'(x)$. Ainsi la dérivée d'une fonction entière est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro.

Cette propriété de la dérivée d'une fonction entière a été prise comme définition de la dérivée d'une fonction continue quelconque. Ainsi nous dirons que *la dérivée d'une fonction continue est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand celui-ci tend vers zéro.*

On peut faire comprendre, à l'aide d'une figure, comment le rapport des accroissements tend en général vers une limite finie et déterminée. Soit $y = f(x)$ la fonction proposée. Traçons dans un plan deux droites fixes OX et OY,



l'une horizontale, l'autre verticale; à partir du point O portons sur la première une longueur OP égale à une valeur quelconque de la variable x ; au point P élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons

une longueur PM égale à la valeur correspondante de la fonction y , et opérons de même pour chaque valeur de x . La fonction étant continue, le lieu des points M ainsi obtenus formera une courbe qui représentera la marche de la fonction. Afin d'étendre ce mode de représentation à toutes les valeurs, on convient de porter les valeurs positives de x à droite du point O, les valeurs négatives à gauche; et de même on porte la valeur de y sur la perpendiculaire, au-dessus si elle est positive, au-dessous si elle est négative.

Cela posé, donnons à x un accroissement $PP' = h$, la fonction éprouvera un accroissement k représenté par la différence $M'D$ entre les deux perpendiculaires ou *ordonnées* voisines MP et M'P'. Traçons la sécante MM'; dans le

triangle rectangle MMD, le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à la tangente de l'angle MMD ou de l'angle β que fait cette sécante avec l'axe horizontal OX. Supposons maintenant que l'accroissement h tende vers zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M, et la sécante, tournant autour du point M, tendra vers une position limite MT qui est la tangente à la courbe au point M. Or, quelque petit que soit h , le rapport $\frac{k}{h}$ reste toujours égal à $\tan \beta$; mais l'angle β tend vers la limite α , angle de la tangente MT avec l'horizontale; donc le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers la limite $\tan \alpha$.

RÈGLES POUR TROUVER LA DÉRIVÉE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UNE PUISSANCE, D'UN QUOTIENT, DE FONCTIONS DONT LES DÉRIVÉES SONT CONNUES.

Dérivée d'une somme.

83. Soient u, v, w diverses fonctions continues de la variable x , y leur somme algébrique

$$y = u + v - w.$$

Désignons par le symbole Δx l'accroissement que l'on donne à la variable x , par $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta y$ les variations ou accroissements qui en résultent pour les fonctions u, v, w, y (la lettre Δ indique en général une variation ou une différence). Nous convenons aussi de représenter les dérivées de ces fonctions par les notations u', v', w', y' , accentuant simplement les lettres qui désignent les fonctions.

On a évidemment

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Si l'on divise tous les termes par Δx , il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que l'accroissement Δx de la variable tende vers zéro, les accroissements correspondants Δu , Δv , Δw , Δy des fonctions tendront aussi vers zéro; le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers une limite qui, par définition, est la dérivée de la fonction u , dérivée que nous représentons par u' ; les rapports $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendront de même vers des limites qui sont les dérivées des fonctions v , w , y , et l'on aura

$$y' = u' + v' - w'.$$

Ainsi la dérivée d'une somme algébrique est la somme des dérivées des diverses fonctions qui la composent.

D'après la règle énoncée pour la dérivation d'un polynôme entier, on voit que cette dérivée est la somme des dérivées des différents termes du polynôme.

Dérivée d'un produit.

84. Considérons d'abord un produit de deux fonctions

$$y = uv.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx , les fonctions u , v , y éprouvent des accroissements correspondants Δu , Δv , Δy , et l'on a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

ou, en effectuant la multiplication et supprimant dans les deux membres les quantités égales y et uv ,

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Divisons tous les termes par Δx , il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Si l'accroissement Δx de la variable x tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendent vers des limites qui sont les dérivées u' , v' , y' des fonctions u , v , y ; le troisième terme du second membre devient nul, parce que le premier facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers une valeur finie u' , tandis que le second tend vers zéro. On a donc

$$y' = uv' + vu'.$$

La dérivée d'un produit de deux facteurs égale le premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus le second multiplié par la dérivée du premier.

Considérons maintenant un produit de trois fonctions

$$y = uvw.$$

Si l'on regarde le produit uv des deux premiers comme ne formant qu'un seul facteur, et si l'on applique la règle précédente, on a

$$y' = (uv)w' + w(uv)';$$

en développant la dérivée $(uv)'$ du produit uv , il vient

$$y' = uvw' + w(uv' + vu'),$$

ou

$$y' = uvw' + uwv' + vwu'.$$

Ainsi, la dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.

Exemples :

$$1^{\circ} \quad y = (2x - 5)(4x^2 + 7x - 3).$$

$$y' = (2x - 5)(8x + 7) + (4x^2 + 7x - 3)2 = 24x^2 - 12x - 41.$$

$$2^{\circ} \quad y = x^3(x^2 + 1)(3x - 1).$$

$$y' = x^3(x^2 + 1)3 + x^3(3x - 1)2x + (x^2 + 1)(3x - 1)3x^2 \\ = 18x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 3x^2.$$

Dérivée d'un quotient.

85. Soit le quotient de deux fonctions

$$y = \frac{u}{v}.$$

La fonction u est le produit des deux fonctions v et y ; si l'on prend la dérivée du produit $u = vy$, d'après la règle précédente, il vient

$$u' = vy' + yv' ;$$

d'où l'on déduit

$$y' = \frac{u' - yv'}{v}.$$

et, en remplaçant dans le numérateur y par $\frac{u}{v}$,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Ainsi, la dérivée d'un quotient égale le dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.

Exemples :

$$1^{\circ} \quad y = \frac{x-1}{x+1},$$

$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$2^{\circ} \quad y = \frac{5x^2-3x+4}{x^2-1},$$

$$y' = \frac{(x^2-1)(10x-3)-(5x^2-3x+4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-18x+3}{(x^2-1)^2}.$$

$$3^{\circ} \quad y = \frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4},$$

$$y' = \frac{-2x(a^4+a^2x^2+x^4)-(a^2-x^2)(2a^2x+4x^3)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-2a^2x^2-2a^4)}{(x^4+a^2x^2+a^4)^2}.$$

Dérivée d'une puissance.

86. Une puissance entière

$$y = u^m$$

d'une fonction u de la variable x , est le produit de m facteurs égaux entre eux

$$y = uuu \dots$$

Si l'on prend la dérivée de ce produit d'après la règle ordinaire, il vient

$$y' = u^{m-1}u' + u^{m-1}u' + \dots$$

ou plus simplement

$$y' = mu^{m-1} u'.$$

On obtient la dérivée de la puissance d'une fonction en multipliant par l'exposant, diminuant cet exposant d'une unité et multipliant le résultat par la dérivée de la fonction.

Ce théorème est vrai pour un exposant quelconque. Considérons une puissance fractionnaire

$$y = u^{\frac{m}{n}};$$

en élevant à la n^{e} puissance, on a

$$y^n = u^m.$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres, d'après la règle précédente, il vient

$$ny^{n-1} y' = mu^{m-1} u',$$

d'où

$$y' = \frac{m}{n} \frac{u^{m-1}}{y^{n-1}} u',$$

et, en remplaçant y par sa valeur $u^{\frac{m}{n}}$,

$$y' = \frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1} u'.$$

Considérons maintenant une puissance négative quelconque

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

En prenant la dérivée du quotient $\frac{1}{u^m}$, on a

$$y' = \frac{-mu^{m-1} u'}{u^{2m}} = -mu^{-m-1} u'.$$

C'est encore la même règle que pour les exposants positifs.

COROLLAIRE. *La dérivée d'une racine carrée égale la dérivée de la fonction placée sous le signe radical divisée par deux fois le radical.* Car, en appliquant la règle précédente à la fonction

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemples.

$$1^{\circ} \quad y = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$2^{\circ} \quad y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$3^{\circ} \quad y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \quad y' = -2x^{-3} = -\frac{1}{x^3}.$$

$$4^{\circ} \quad y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$5^{\circ} \quad y = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}, \quad y' = \frac{6x^2 - 8x}{2\sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}}.$$

$$6^{\circ} \quad y = x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$y' = (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^4 + a^2 x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$7^{\circ} \quad y = (a + bx^m)^n,$$

$$y' = n(a + bx^m)^{n-1} m b x^{m-1} = m n b x^{m-1} (a + bx^m)^{n-1}.$$

$$8^{\circ} \quad y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{d}{x^2} = a + b x^{-\frac{2}{3}} - c x^{-\frac{4}{3}} + d x^{-2},$$

$$y' = -\frac{2}{3} b x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} c x^{-\frac{7}{3}} - 2 d x^{-3} = -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2d}{x^3}.$$

$$9^{\circ} \quad y = \sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt{(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^3} = \left(a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$y' = \frac{3}{4} \left(a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE FONCTION.

87. Soit y une fonction $f(u)$ de la quantité u qui est elle-même une fonction de la variable x ; par l'intermédiaire de la variable u , y pourra être considérée comme une fonction de x ; c'est ce que l'on nomme une *fonction de fonction*.

Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx , il en résulte pour u un accroissement Δu , et pour y un accroissement Δy . On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lorsque l'accroissement Δx de la variable tend vers zéro, l'accroissement Δu , et par suite l'accroissement Δy , tendent aussi vers zéro; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la dérivée y' de y considérée comme fonction de x ; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ est la dérivée $f'(u)$ de la fonction $f(u)$, c'est-à-dire de y considérée comme fonction de la variable u ; enfin la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ est la dérivée u' de la fonction u de x . On a donc

$$y' = f'(u) \times u'.$$

Ainsi la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent.

Ce principe peut être généralisé. Soit y une fonction $f(v)$ de la quantité v qui est une fonction $\varphi(u)$ de la quantité u qui est elle-même une fonction de x ; par l'intermédiaire des quantités v et u , y est finalement une fonction de x dont nous cherchons la dérivée. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et, en passant à la limite,

$$y' = f'(v) \times \varphi'(u) \times u'.$$

La règle établie plus haut pour trouver la dérivée d'une fonction u^m est un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer sur les fonctions de fonctions.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES DIRECTES ET INVERSES.

Dérivée du sinus.

88. Soit la fonction

$$y = \sin x.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement h , il en résulte pour la fonction l'accroissement

$$k = \sin(x + h) - \sin x.$$

En prenant le rapport des deux accroissements et transformant la différence de sinus en produit, il vient

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h},$$

ou

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Quand l'accroissement h de la variable tend vers zéro,

le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ du sinus à l'arc $\frac{h}{2}$ tend vers l'unité, tan-

dis que le second facteur se réduit à $\cos x$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $\cos x$, et l'on a

$$y' = \cos x.$$

Ainsi la dérivée du sinus est le cosinus.

Dérivée du cosinus.

89. Soit la fonction

$$y = \cos x.$$

On a de la même manière

$$\begin{aligned} \frac{k}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} \\ &= - \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \left(x + \frac{h}{2} \right), \end{aligned}$$

et, en passant à la limite,

$$y' = -\sin x.$$

Ainsi la dérivée du cosinus est le sinus pris en signe contraire.

Au moyen de ce qui précède, on obtient aisément les dérivées successives du sinus ou du cosinus.

$$\begin{array}{ll}
 y = \sin x, & y = \cos x, \\
 y' = \cos x, & y' = -\sin x, \\
 y'' = -\sin x, & y'' = -\cos x, \\
 y''' = -\cos x, & y''' = \sin x, \\
 y^{(iv)} = \sin x, & y^{(iv)} = \cos x, \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

On voit que ces dérivées se reproduisent périodiquement de quatre en quatre.

Dérivées de la tangente et de la sécante.

90. On obtient la dérivée de la fonction

$$y = \tan x,$$

en prenant la dérivée du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$, ce qui donne

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De même la cotangente

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La sécante pouvant se mettre sous la forme

$$y = \sec x = (\cos x)^{-1},$$

on obtiendra sa dérivée par la règle des puissances

$$y' = -(\cos x)^{-2} \times (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

De même la cosécante

$$y = \operatorname{cosec} x = (\sin x)^{-1}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

91. Soit la fonction inverse

$$y = \arcsin x.$$

On en déduit

$$\sin y = x.$$

Prenons la dérivée des deux membres; y étant une fonction de x , le premier membre $\sin y$ est une fonction de fonction qui a pour dérivée $\cos y \times y'$; la dérivée du second membre x est l'unité; on a donc

$$\cos y \times y' = 1;$$

d'où

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Puisque $\sin y = x$, on a $\cos y = \sqrt{1-x^2}$; en remplaçant $\cos y$ par sa valeur, il vient

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On suppose que l'arc y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. S'il

était compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, le cosinus étant négatif, il faudrait mettre le signe — devant le radical.

92. La dérivée de la fonction inverse

$$y = \arccos x$$

s'obtient de la même manière. On a, en effet,

$$\cos y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$-\sin y \times y' = 1;$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On suppose l'arc compris entre 0 et π . S'il était compris entre π et 2π , le sinus étant négatif, il faudrait mettre le signe — devant le radical.

93. Considérons enfin la fonction inverse

$$y = \arctan x.$$

On a

$$\tan y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1;$$

d'où

$$y' = \cos^2 y.$$

Mais on sait que

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

donc

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

DÉRIVÉES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DE LA
FONCTION LOGARITHMIQUE.

Dérivée de la fonction exponentielle.

94. Soit la fonction exponentielle

$$y = a^x.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement h , la fonction éprouve un accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et le rapport des deux accroissements est

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

On sait que, lorsque h est très-petit, la différence $a^h - 1$ est très-petite; posons donc

$$a^h - 1 = \alpha,$$

d'où

$$a^h = 1 + \alpha,$$

et, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$\begin{aligned} hLa &= L(1 + \alpha), \\ h &= \frac{L(1 + \alpha)}{La}. \end{aligned}$$

Remplaçons h par sa valeur, l'expression du rapport de-

vient

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{x \cdot La}{L(1+x)} = \frac{a^x La}{\frac{1}{x} L(1+x)} = \frac{a^x La}{L(1+x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, x tend aussi vers zéro, et la quantité $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ devient égale à e (n° 51) ; mais $Le = 1$; donc

$$y' = \lim \frac{k}{h} = a^x La.$$

Ainsi, pour avoir la dérivée d'une fonction exponentielle, il suffit de multiplier cette fonction par le logarithme népérien de la base.

95. Considérons la fonction exponentielle $y = e^x$; puisque $Le = 1$, on a $y' = e^x$. Ainsi, la dérivée de la fonction e^x est cette fonction elle-même. La fonction e^x jouit de la propriété caractéristique de se reproduire elle-même par la dérivation.

Dérivée de la fonction logarithmique.

96. La fonction logarithmique

$$y = \log x$$

est l'inverse de la fonction exponentielle. Si a désigne la base du système de logarithmès, on a

$$a^y = x.$$

Prenons les dérivées des deux membres d'après la loi que nous venons de démontrer, en regardant a^y comme une fonction de fonction ; il vient

$$a^y La \times y' = 1,$$

d'où

$$y' = \frac{1}{a^x La}.$$

En remplaçant a^x par x , et remarquant que la quantité $\frac{1}{La}$ est le module M du système de logarithmes (n° 72), on a enfin

$$y' = \frac{1}{xLa} = \frac{M}{x}.$$

Telle est la dérivée de la fonction logarithmique.

Considérons comme cas particulier la fonction logarithmique népérienne

$$y = Lx;$$

le module étant l'unité, on a

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Résumé.

97. Nous avons trouvé les dérivées des fonctions simples que l'on considère ordinairement en mathématiques; il est nécessaire de les apprendre par cœur; le tableau suivant permet de les embrasser d'un coup d'œil :

$y = x^m,$	$y' = mx^{m-1},$ m étant quelconque,	
$y = \sin x,$	$y' = \cos x,$	
$y = \cos x,$	$y' = -\sin x,$	
$y = \operatorname{tang} x,$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$	
$y = \operatorname{arc} \sin x,$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	} en supposant l'arc x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2},$
$y = \operatorname{arc} \cos x,$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

$$y = \text{arc tang } x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = a^x, \quad y' = a^x \text{La},$$

$$y = e^x, \quad y' = e^x,$$

$$y = \log x, \quad y' = \frac{1}{x \text{La}},$$

$$y = \text{L}x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

98. Les fonctions complexes pouvant être considérées comme des fonctions de fonctions, on calculera leurs dérivées d'après la loi connue. En voici quelques exemples :

1° $y = \sin x^2$. Si l'on pose $u = x^2$, on a $y = \sin u$ et l'on voit que y est une fonction de fonction. L'application du théorème donne

$$y' = \cos u \times u' = 2x \cos x^2.$$

2° $y = e^{\sin x}$. Si l'on pose $u = \sin x$, on a encore une fonction de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u \times u' = e^{\sin x} \times \cos x.$$

3° $y = e^{\sin x^2}$. Si l'on pose $u = x^2$, $v = \sin u$, on a une fonction de fonction $y = e^v$ plus compliquée que les précédentes ; le même théorème donne

$$y' = e^v \cdot \cos u \cdot 2x = 2x e^{\sin x^2} \cos x^2.$$

4° $y = \text{L}(x + \sqrt{1+x^2})$. En posant $u = x + \sqrt{1+x^2}$, on a la fonction de fonction $y = \text{L}u$, qui admet pour dérivée

$$y' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Par l'habitude, on arrive à décomposer les fonctions complexes par la pensée, sans employer les lettres auxiliaires u et v .

UNE FONCTION EST CROISSANTE OU DÉCROISSANTE SUIVANT QUE SA DÉRIVÉE EST POSITIVE OU NÉGATIVE.

99. Soit $f(x)$ une fonction continue, $f'(x)$ sa dérivée. Nous avons appelé dérivée d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement k de la fonction à l'accroissement h de la variable, quand ces accroissements tendent vers zéro. Lorsque h est très-petit, le rapport $\frac{k}{h}$ diffère très-peu de sa limite ; on a donc

$$\frac{k}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

d'où

$$k = h[f'(x) + \varepsilon],$$

ε étant une quantité très-petite qui s'annule avec h . La dérivée $f'(x)$, ayant une valeur finie, est plus grande que la quantité infiniment petite ε en valeur absolue, et par conséquent donne son signe à la parenthèse. En supposant h positive, c'est-à-dire la variable x croissante, on voit que la variation k de la fonction aura le signe de la dérivée $f'(x)$; si la dérivée est positive, k sera positive et la fonction ira en croissant ; si la dérivée est négative, k sera négative et la fonction ira en décroissant.

100. Lorsqu'une fonction, après avoir augmenté, décroît ensuite, elle passe par un *maximum*, c'est à-dire par une valeur plus grande que les valeurs voisines. Au contraire,

lorsque la fonction, après avoir diminué, croît ensuite, elle passe par un *minimum*, c'est-à-dire par une valeur plus petite que les valeurs voisines.

Dans le premier cas, la fonction commençant par croître, la dérivée est d'abord positive; la fonction décroissant ensuite, la dérivée devient négative. Ainsi, quand la fonction passe par un maximum, la dérivée change de signe, de positive devenant négative.

Dans le second cas, la fonction commençant par décroître, la dérivée est d'abord négative; la fonction croissant ensuite, la dérivée devient positive. Ainsi, quand la fonction passe par un minimum, la dérivée change de signe, de négative devenant positive.

Les réciproques sont vraies : lorsque la dérivée change de signe, la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Si la dérivée de positive devient négative, la fonction, croissant d'abord pour décroître ensuite, passe par un maximum; si la dérivée de négative devient positive, la fonction, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum.

Ordinairement la dérivée d'une fonction continue est aussi finie et continue; elle change de signe en passant par la valeur intermédiaire zéro. On obtiendra donc les valeurs de x qui rendent la fonction maximum ou minimum en cherchant les valeurs de x qui annulent la dérivée, et qui en outre lui font éprouver un changement de signe.

Exemples.

101. QUESTION I. Quel est le plus grand de tous les cylindres circulaires droits ayant même surface totale?

Appelons x le rayon de la base, y la hauteur, et représen-

tons la surface totale donnée par $2\pi a^2$; nous avons la relation

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

ou plus simplement

$$x^2 + xy = a^2.$$

Le volume V du cylindre a pour expression

$$V = \pi x^2 y,$$

et si l'on remplace la hauteur y par sa valeur $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ tirée de la relation précédente,

$$V = \pi x(a^2 - x^2);$$

c'est une fonction de la variable indépendante x .

La dérivée de cette fonction

$$V' = \pi(a^2 - 3x^2)$$

s'annule pour

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Les valeurs de x et de y devant rester positives, le rayon x de la base peut varier de zéro à a . A l'inspection de la dérivée, on voit qu'elle est positive pour les valeurs de x inférieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$; si donc on fait croître x de 0 à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, la dérivée étant positive, le volume croît; x croissant ensuite de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à a , la dérivée devient négative et le volume décroît. Le

volume passe donc par une valeur maximum qu'il acquiert pour $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$; la valeur correspondante de y est $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ainsi, parmi tous les cylindres de même surface totale, le plus grand est celui qui a sa hauteur égale au diamètre de sa base.

102. QUESTION II. Quel est le plus grand de tous les cônes circulaires droits ayant même surface totale?

Si l'on appelle x le rayon de la base, y la hauteur, πa^2 la surface donnée, on a la relation

$$x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2;$$

le volume a pour expression

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y,$$

ou, en remplaçant y par sa valeur

$$y = \frac{a\sqrt{a^2 - 2x^2}}{x}$$

tirée de la relation précédente,

$$V = \frac{\pi a}{3} x \sqrt{a^2 - 2x^2}.$$

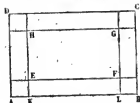
Le volume est une fonction de x qui a pour dérivée

$$V' = \frac{\pi a(a^2 - 4x^2)}{3\sqrt{a^2 - 2x^2}}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = \frac{a}{2}$. Les valeurs de x et de y devant rester réelles et positives, x ne peut varier que

de 0 à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. La variable x croissant de 0 à $\frac{a}{2}$, la dérivée est positive et le volume croît; x croissant de $\frac{a}{2}$ à $\frac{a}{\sqrt{2}}$, la dérivée devient négative, et le volume décroît. Le volume passe donc par un maximum quand $x = \frac{a}{2}$; la valeur correspondante de y est $y = a\sqrt{2}$; on en déduit pour le côté du cône la valeur $\frac{3a}{2}$. Ainsi, parmi tous les cônes de même surface, le plus grand est celui dans lequel le côté est au diamètre de la base dans le rapport de 3 à 2.

103. QUESTION III. Étant donnée une feuille de carton



rectangulaire ABCD, si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles, et qu'on relève les portions rectangulaires telles que

EKLF, on forme une boîte à fond rectangulaire EFGH. A quelle distance faut-il mener les parallèles pour que la boîte soit la plus grande?

Appelons $2a$ et $2b$ les côtés AB et BC de la feuille de carton, x la distance variable AK à laquelle on mène les parallèles; le fond de la boîte est un rectangle ayant pour côtés $EF = 2(a - x)$ et $EH = 2(b - x)$, et pour surface $4(a - x)(b - x)$; la hauteur de la boîte est x ; le volume a donc pour expression

$$V = 4x(a - x)(b - x).$$

La dérivée de cette fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a + b)x + ab];$$

elle s'annule pour les deux valeurs

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3},$$

racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0.$$

Supposons $a > b$; d'après la nature de la question, x doit être plus petit que b ; or, il est aisé de voir que des deux racines de l'équation du second degré, l'une est plus petite que b , l'autre plus grande; car, si dans le premier membre de cette équation on remplace x par zéro, on trouve un résultat positif $+ab$; par b un résultat négatif $-b(a-b)$; donc l'équation admet une racine positive comprise entre 0 et b (*Voyez I^{re} partie, n° 161*); l'autre racine étant aussi positive est nécessairement plus grande que b ; la première racine

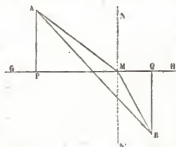
$$x' = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3}$$

convient seule à la question.

Si l'on fait croître x de 0 à x' , le premier membre de l'équation, et par suite la dérivée, sont positives, et la fonction croît; x croissant de x' à b , la dérivée devient négative, et la fonction décroît; la fonction acquiert donc une valeur maximum pour $x = x'$.

104. QUESTION IV. Soit GH la ligne de séparation de deux milieux; on suppose que la lumière se meuve dans ces deux milieux avec des vitesses différentes v et v' . Quel chemin doit suivre le rayon lumineux pour aller du point A au point B dans le temps le plus court?

Nous pouvons déterminer la position des points A et B par leurs distances AP et BQ à la droite GH, et par la distance PQ ; nous désignerons



ces trois longueurs connues par a, b, c . Si la vitesse était la même dans les deux milieux, il est clair que la lumière suivrait le chemin le plus court, c'est-à-dire la droite AB ; mais la vitesse v dans le milieu supérieur

étant plus grande que la vitesse v' dans le milieu inférieur, il y a avantage à ce que la lumière parcoure une plus grande longueur dans le premier milieu et une moindre dans le second ; elle suivra donc une ligne brisée telle que AMB. Appelons x la distance cherchée PM ; la lumière parcourt dans les deux milieux les longueurs

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

elle emploie à les parcourir les temps

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v}, \quad \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v'};$$

Elle met donc, pour aller de A à B, en suivant le chemin AMB, le temps

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v'}.$$

Ce temps est une fonction de x , considéré comme variable indépendante ; elle a pour dérivée

$$t' = \frac{x}{v \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v' \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Au point M menons une perpendiculaire NN' à GH; l'angle AMN est l'angle d'incidence i , l'angle BMN' l'angle de réflexion i' . Comme on a

$$\sin i = \frac{AP}{AM} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$\sin i' = \frac{QM}{BM} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}};$$

il en résulte cette expression de la dérivée

$$t = \frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}.$$

La dérivée sera nulle quand on aura

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'}.$$

Supposons que le point M se déplace de P en Q, c'est-à-dire que la variable x croisse de 0 à c ; la dérivée est négative pour $x=0$, positive pour $x=c$; donc la fonction t , décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum. C'est ce minimum qui est défini par la relation

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'};$$

on retrouve ainsi la loi ordinaire de la réfraction de la lumière.

105. QUESTION V. Étudier la variation de la surface du secteur sphérique de volume constant.

Appelons x le rayon du secteur, y la hauteur de la calotte qui lui sert de base, et supposons que le volume soit égal à celui d'une sphère de rayon donné a ; nous aurons la relation

$$\frac{2}{3} \pi x^3 y = \frac{3}{4} \pi a^3,$$

ou plus simplement

$$x^3 y = 2a^3, \quad y = \frac{2a^3}{x^3}.$$

La surface du secteur a pour expression

$$S = \pi x \sqrt{y(2x - y)} + 2\pi xy,$$

et, si l'on remplace y par sa valeur,

$$S = 2\pi a \left[\frac{2a^3}{x} + \sqrt{a \left(x - \frac{a^3}{x^2} \right)} \right].$$

Cette fonction a pour dérivée

$$S' = \frac{\pi a^3}{x^3} \left(\frac{x^3 + 2a^3}{\sqrt{a(x^3 - a^3)}} - 4a \right).$$

La dérivée change de signe lorsque le sens de l'inégalité

$$\frac{x^3 + 2a^3}{\sqrt{a(x^3 - a^3)}} - 4a > 0$$

change ; mais cette inégalité se ramène à la suivante

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 > 0.$$

En égalant à zéro, on arrive à l'équation trinôme (I^{re} partie, n° 177)

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 = 0,$$

qui admet les deux racines réelles $a\sqrt[3]{2}$ et $a\sqrt[3]{10}$.

Pour que la surface S soit réelle, il faut que la valeur de x soit plus grande que a ; ainsi, le rayon x peut varier de a à $+\infty$. Lorsque $x = a$, on a $y = 2a$, $S = 4\pi a^3$; le

secteur se réduit à une sphère de rayon a . Si l'on donne à x une valeur un peu plus grande que a , le premier terme de S' ayant une valeur positive très-grande, la dérivée est positive, et par conséquent la surface S augmente quand x croît à partir de a ; on en conclut que la surface part d'une valeur *minimum* quand x part de la valeur initiale a ; ce secteur de surface minimum est une sphère.

Supposons que x croisse de a à la plus petite racine $a\sqrt[3]{2}$; la dérivée, conservant le même signe, reste positive et la surface augmente; quand x dépasse $a\sqrt[3]{2}$, la dérivée, s'évanouissant et changeant de signe, devient négative, et la surface diminue. La surface passe donc par une valeur *maximum*, pour $x = a\sqrt[3]{2}$; la valeur correspondante de y étant égale à celle de x , le secteur prend alors la forme d'une demi-sphère. Dans l'intervalle, la valeur de y , qui va toujours en diminuant, était supérieure à celle de x et le secteur plus grand qu'un hémisphère.

Quand x croît de la plus petite racine à la plus grande, la dérivée reste négative et la surface diminue; quand x dépasse $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée, s'évanouissant une seconde fois et changeant de signe, devient positive et la surface augmente. La surface passe donc par un *minimum* pour $x = a\sqrt[3]{10}$; la hauteur y de la calotte est alors le cinquième du rayon.

Quand x croît à l'infini à partir de $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée reste constamment positive et la surface augmente indéfiniment.

En résumant ce qui précède, on voit que le secteur de volume constant a d'abord la forme d'une sphère entière, et alors sa surface est minimum. La sphère s'ouvre de plus en plus, et la surface du secteur augmente jusqu'à ce qu'il

se réduise à une moitié de sphère ; alors la surface acquiert sa valeur maximum. Le secteur s'allonge ensuite, et la surface diminue jusqu'à ce que la hauteur de la calotte ne soit que le cinquième du rayon ; alors la surface passe par un minimum. Le secteur continuant à s'allonger indéfiniment, la surface augmente à partir de ce minimum et augmente indéfiniment.

Dérivées d'une fonction de plusieurs variables.

106. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable ; nous allons dire quelques mots des fonctions de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y (on nomme variables indépendantes des quantités qui varient d'une manière tout à fait arbitraire et indépendamment l'une de l'autre). Si, regardant y comme une constante, nous prenons la dérivée de la fonction par rapport à la variable x , nous aurons ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de la fonction par rapport à x . De même, si, regardant x comme une constante, nous prenons la dérivée par rapport à la variable y , nous aurons la dérivée partielle par rapport à y . Telles sont les deux dérivées partielles du premier ordre de la fonction proposée ; nous les désignerons par les notations f'_x et f'_y , l'indice indiquant la lettre par rapport à laquelle on dérive.

Si l'on dérive deux fois successivement, soit deux fois par rapport à x , soit une fois par rapport à x et une seconde fois par rapport à y , soit deux fois par rapport à y , on obtient trois dérivées partielles du second ordre que nous désignerons par les notations f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yy} . Et ainsi de suite.

Par exemple, soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2.$$

En dérivant par rapport à x ou par rapport à y , on a les deux dérivées partielles du premier ordre

$$\begin{aligned} f_x &= 6x - 5y - 3, \\ f_y &= -5x + 2y + 4. \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois, soit par rapport à x , soit par rapport à y , on forme les trois dérivées partielles du second ordre

$$f_{xx} = 6, \quad f_{xy} = -5, \quad f_{yy} = 2.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

Extension du théorème des fonctions de fonctions.

107. Soit une fonction $f(u, v)$ de deux quantités u et v qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x ; il est clair que y est en définitive une fonction de la variable x . On demande sa dérivée. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx , il en résulte pour u et v les accroissements Δu et Δv , et pour y l'accroissement Δy , et l'on a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

ou

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

En divisant par Δx , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que Δx tende vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v . Dans le rapport

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v},$$

on voit que, u restant constante, la variable v éprouve l'accroissement Δv ; la limite de ce rapport est donc la dérivée partielle $f'_v(u, v)$ de la fonction $f(u, v)$ par rapport à v . On voit de même que, dans le rapport

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u},$$

la quantité $v + \Delta v$ restant constante, la variable u éprouve l'accroissement Δu ; la limite de ce rapport est la dérivée partielle de la fonction $f(u, v + \Delta v)$ par rapport à u ; mais la fonction $f(u, v + \Delta v)$ devenant égale à $f(u, v)$, puisque Δv s'évanouit, la limite de ce rapport sera $f'_u(u, v)$. On a donc

$$y' = f'_u \times u' + f'_v \times v'.$$

Ainsi la dérivée d'une fonction de deux fonctions u et v d'une même variable x égale la dérivée partielle de la fonction proposée par rapport à u multipliée par la dérivée de u , plus la dérivée partielle par rapport à v multipliée par la dérivée de v .

Exemples :

1° $y = x^x$. Posant $u = x$, $v = x$, on aura $y = u^v$; d'où, en appliquant le théorème précédent,

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v.Lu.v' = x^x + x^x.Lx = x^x(1 + Lx).$$

2° $y = (\sin x)^{4x}$. Posant $u = \sin x$, $v = 4x$, on aura de même $y = u^v$; d'où

$$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot L u \cdot v' = 4x \cos x (\sin x)^{4x-1} + 4(\sin x)^{4x} L(\sin x),$$

Dérivées des fonctions implicites.

108. On dit qu'une fonction est *implicite* lorsqu'elle est liée à la variable par une équation non résolue. Ainsi l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle le premier membre est une fonction quelconque des deux variables x et y , définit une fonction implicite y de x . Si l'on pouvait résoudre l'équation, on en déduirait $y = \varphi(x)$ et la fonction deviendrait *explicite*.

On peut obtenir aisément la dérivée d'une fonction implicite. En effet, prenons la dérivée de la fonction $f(x, y)$, dans laquelle nous regardons x comme la variable indépendante, et y comme une fonction de x ; cette dérivée, d'après le théorème précédent, est égale à

$$f'_x + f'_y \cdot y'.$$

Comme la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, sa dérivée est aussi constamment nulle, et l'on a l'équation

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est l'expression de la dérivée de la fonction implicite y .

Exemples :

1° Considérons la fonction implicite y définie par l'équation

$$x^3 - 4xy + y^3 + 2x = 0.$$

On a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$y' = - \frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

L'équation proposée étant du second degré par rapport à y , peut être résolue, ce qui donne

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}.$$

La fonction devenant ainsi explicite, on trouve directement sa dérivée,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}.$$

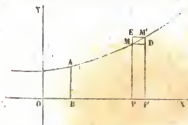
En remplaçant y par sa valeur dans la première expression de y' , on obtient la seconde

$$2^\circ \quad 3x^3 - 4xy + y^3 = 0, \quad y' = - \frac{15x^2 - 4y}{-4x + 3y}.$$

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

109. On appelle *fonction primitive* d'une fonction donnée une fonction dont la fonction proposée est la dérivée. Nous allons démontrer d'abord l'existence de la fonction primitive, qu'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes de l'algèbre.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée; représentons cette fonction par une courbe, comme nous l'avons expliqué au n° 82, en portant sur la ligne horizontale OX , à partir



du point O , des longueurs égales aux diverses valeurs de la variable x , et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de y . Considé-

rons l'aire $ABPM$ comptée à partir d'une ordonnée fixe AB jusqu'à une ordonnée mobile MP ; cette aire est une fonction de x ; car, si l'on fait croître x , l'ordonnée MP s'éloignant, l'aire augmente; l'aire, variant avec x , est donc une fonction de x ; nous désignerons cette fonction par $F(x)$. Je vais démontrer que la fonction $F(x)$ ainsi définie est la fonction primitive de la fonction proposée $f(x)$. Concevons, en effet, que l'on donne à x un accroissement $PP' = h$; l'accroissement k de la fonction $F(x)$ sera l'aire du trapèze curviligne $MPP'M'$; par les points M et M' menons les horizontales MD et $M'E$; on voit que l'aire du trapèze curviligne est comprise entre celles des rectangles $MPP'D$ et $EPP'M'$; ces rectangles ont pour mesure $MP \times h$ et $M'P' \times h$; on a donc

$$MP \times h < k < M'P' \times h,$$

et, en divisant par h ,

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'.$$

Quand h tend vers zéro, l'ordonnée $M'P'$ devient égale à MP ;

donc la limite de $\frac{k}{h}$ ou la dérivée $F'(x)$ est égale à l'ordonnée MP, c'est-à-dire à $f(x)$. Ainsi la fonction proposée $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$; et réciproquement, la fonction $F(x)$ est la fonction primitive de $f(x)$.

Il résulte de là qu'une fonction continue quelconque a une fonction primitive, que l'on peut représenter par une aire plane. Si à la fonction primitive $F(x)$ on ajoute une constante arbitraire C , on aura encore une fonction primitive $F(x) + C$; car la constante ne donne rien dans la dérivée.

DEUX FONCTIONS QUI ONT DES DÉRIVÉES ÉGALES NE PEUVENT DIFFÉRER QUE PAR UNE CONSTANTE.

110. Je vais démontrer d'abord que lorsqu'une fonction a sa dérivée constamment nulle, cette fonction est constante. Soit $f(x)$ une fonction ; en donnant à x l'accroissement h , nous avons trouvé (n° 99) la relation

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \epsilon],$$

ϵ s'évanouissant avec h . Si la dérivée est constamment nulle, cette relation se réduit à

$$f(x+h) - f(x) = h\epsilon.$$

Je considère deux valeurs quelconques x_0 et X de la variable x , X étant supposée plus grande que x_0 ; je partage l'intervalle $X - x_0$ en n parties égales, et j'appelle h chacune de ces parties. En appliquant la relation précédente à ces divers éléments, on a

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h) - f(x_0) &= h\varepsilon_0, \\
 f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) &= h\varepsilon_1, \\
 f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) &= h\varepsilon_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 f(X) - f(x_0 + (n-1)h) &= h\varepsilon_{n-1},
 \end{aligned}$$

chacune des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ s'évanouissant avec h .

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les quantités intermédiaires disparaissent, et l'on trouve

$$f(X) - f(x_0) = h(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}).$$

Appelons ε la plus grande des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ en valeur absolue; leur somme sera évidemment moindre que $n\varepsilon$, et le second membre plus petit que $nh\varepsilon$ ou que $(X - x_0)\varepsilon$, puisque $n h$ égale $X - x_0$; on aura donc

$$f(X) - f(x_0) < (X - x_0)\varepsilon.$$

Imaginons maintenant que l'on partage l'intervalle constant $X - x_0$ en un nombre de parties de plus en plus grand; la grandeur h des parties diminuera indéfiniment; toutes les quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$, et par conséquent la plus grande d'entre elles ε , tendront simultanément vers zéro, et le produit $(X - x_0)\varepsilon$ s'évanouira. Il en résulte que la différence $f(X) - f(x_0)$ est nulle, c'est-à-dire que les valeurs $f(X)$ et $f(x_0)$ de la fonction pour deux valeurs quelconques de la variable sont égales; ainsi la fonction conserve toujours la même valeur: c'est une constante.

111. Soient maintenant deux fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, ayant même dérivée $f(x)$, je dis que ces deux fonctions ne peuvent différer que par une constante. En effet, on a par

hypothèse

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x), \\ F'(x) &= f(x);\end{aligned}$$

si l'on retranche ces deux égalités l'une de l'autre, il vient

$$\varphi'(x) - F'(x) = 0.$$

Mais $\varphi'(x) - F'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi(x) - F(x)$; puisque cette dérivée est constamment nulle, la fonction est constante; donc

$$\varphi(x) - F(x) = C.$$

112. Nous avons dit (n° 109) que lorsqu'on a trouvé une fonction primitive $F(x)$ de la fonction proposée, et que l'on y ajoute une constante arbitraire, on obtient une nouvelle fonction primitive $F(x) + C$. Il résulte de ce qui précède que l'on forme ainsi toutes les fonctions primitives de la fonction proposée, puisque toute autre fonction primitive ne diffère de la première que par une constante. Cette fonction primitive $F(x) + C$, renfermant une constante arbitraire, s'appelle, pour cette raison, fonction primitive *générale* de la fonction proposée.

On peut déterminer la constante de manière que la fonction primitive ait une valeur donnée A pour une valeur donnée a de x ; on posera

$$F(a) + C = A.$$

d'où

$$C = A - F(a).$$

Si l'on veut, par exemple, que la fonction primitive s'annule pour $x = a$, on posera

$$F(a) + C = 0;$$

d'où

$$C = -F(a),$$

et la fonction primitive devient $F(x) - F(a)$.

La représentation géométrique de la fonction primitive montre bien que cette fonction renferme une constante arbitraire; car on peut compter l'aire à partir d'une ordonnée initiale AB quelconque, et quand on change la position de cette ordonnée initiale, on modifie évidemment l'aire d'une quantité constante. Déterminer la constante de manière que la fonction primitive s'annule pour $x = a$, c'est compter l'aire à partir de l'ordonnée initiale qui correspond à $x = a$.

REVENIR DE LA DÉRIVÉE A LA FONCTION PRIMITIVE, DANS LE CAS OU CETTE OPÉRATION PEUT SE FAIRE IMMÉDIATEMENT.

113. Considérons d'abord une fonction entière

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \dots + A_{m-1}x + A_m;$$

sa fonction primitive est,

$$\frac{A_0x^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1x^m}{m} + \frac{A_2x^{m-1}}{m-1} \dots + \frac{A_{m-1}x^2}{2} + A_mx + C;$$

car en prenant la dérivée de ce polynôme on retrouve le polynôme proposé. Ainsi, pour avoir la fonction primitive d'une fonction entière, on augmente tous les exposants d'une unité et on divise chaque terme par l'exposant ainsi augmenté. Cette opération élève le degré d'une unité.

Par exemple, le polynôme

$$x^3 - 5x + 7$$

a pour fonction primitive générale

$$\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$$

Si l'on veut que la fonction primitive s'annule pour $x = 0$, on fera $C = 0$.

La même règle s'applique aux exposants quelconques.

Exemples.

$$1^{\circ} \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

$$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3x\sqrt{x}} + C.$$

$$2^{\circ} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

$$F(x) = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3^{\circ} \quad f(x) = -\frac{2}{3} ax^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} bx^{-\frac{7}{2}} - 2dx^{-\frac{1}{2}}.$$

$$F(x) = ax^{-\frac{1}{2}} - bx^{-\frac{5}{2}} + dx^{-\frac{1}{2}} + C.$$

114. Voici encore d'autres cas où l'on peut trouver immédiatement la fonction primitive :

$$1^{\circ} \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = Lx + C,$$

$$2^{\circ} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad F(x) = \text{arc tang } x + C,$$

$$3^{\circ} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \text{arc sin } x + C,$$

$$4^{\circ} \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = -\text{arc cos } x + C,$$

- 5° $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x + C$,
 6° $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{\text{La}} + C$,
 7° $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + C$,
 8° $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C$,
 9° $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{tang } x + C$,
 10° $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\cot x + C$,
 11° $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $F(x) = \sec x + C$,
 12° $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\text{coséc } x + C$.

Souvent le théorème sur les fonctions de fonctions permet de reconnaître la fonction primitive :

- 1° $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $F(x) = \text{L}(x+a) + C$,
 2° $f(x) = \frac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m}$, $F(x) = \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$,
 3° $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $F(x) = \frac{1}{a} \text{arc tang } \frac{x}{a} + C$,
 4° $f(x) = \frac{x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{a^2+x^2}$, $F(x) = \frac{1}{2} \text{L}(a^2+x^2) + C$.

On voit ici que, le numérateur $2x$ étant la dérivée du dénominateur a^2+x^2 , la fonction $\frac{2x}{a^2+x^2}$ est la dérivée de $\text{L}(a^2+x^2)$.

- 5° $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $F(x) = \sqrt{a^2+x^2} + C$.

$$6^{\circ} f(x) = e^{ax}, \quad F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$7^{\circ} f(x) = \cos ax, \quad F(x) = \frac{\sin ax}{a} + C,$$

$$8^{\circ} f(x) = \frac{Lx}{x}, \quad F(x) = \frac{1}{2}(Lx)^2 + C,$$

$$9^{\circ} f(x) = \frac{1}{xLx}, \quad F(x) = Lx + C,$$

$$10^{\circ} f(x) = \frac{1}{x(Lx)^m}, \quad F(x) = \frac{-1}{(m-1)(Lx)^{m-1}} + C,$$

$$11^{\circ} f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}, \quad F(x) = \arctan(e^x) + C.$$

APPLICATION DE LA THÉORIE DES DÉRIVÉES AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS $L(1+x)$ ET $\arctan x$ EN SÉRIES CONVERGENTES, ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE x , LORSQUE CETTE VARIABLE RESTE COMPRISE ENTRE -1 ET $+1$.

Développement de $L(1+x)$.

115. La fonction de $L(1+x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x}$. En effectuant la division de 1 par $1+x$, et ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de x , on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \mp x^{n-1} \pm \frac{x^n}{1+x}.$$

Prenons les fonctions primitives des deux membres de cette égalité; la fonction primitive du premier membre est $L(1+x)$; celle du second membre est

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \mp \frac{x^n}{n} \pm \varphi(x),$$

en désignant par $\varphi(x)$ celle des fonctions primitives de $\frac{x^n}{1+x}$ qui s'annule pour $x=0$, ce qu'on peut toujours supposer (n° 112). Ces deux fonctions primitives, ayant leurs dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante; mais elles deviennent toutes deux égales à zéro pour $x=0$; donc elles restent constamment égales, et l'on a

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \mp \frac{x^n}{n} \pm \varphi(x).$$

Je vais démontrer que, si la variable x est plus petite que 1 en valeur absolue, la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment. Supposons d'abord x positive; la valeur de la fonction $\frac{x^n}{1+x}$ étant positive et inférieure à x^n , on aura

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &> 0, \\ \varphi(x) - x^n &< 0. \end{aligned}$$

Ces deux expressions admettent respectivement pour fonctions primitives

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La fonction $\varphi(x)$ ayant sa dérivée positive, va en croissant avec x ; comme elle s'évanouit pour $x=0$, elle prend des valeurs positives croissantes quand x croît de 0 à 1. La fonction $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant sa dérivée négative, va en décroissant quand x croît; comme elle s'évanouit aussi avec x , elle prend des valeurs négatives quand x varie

de 0 à 1; on a donc

$$\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1} < 0,$$

ou

$$\varphi(x) < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Lorsque n augmente indéfiniment, x étant inférieur

ou égal à l'unité, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et par suite $\varphi(x)$, tendent vers zéro, et le développement se prolonge en série convergente

$$(1) \quad L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdot \dots \dots \dots$$

116. Supposons maintenant que la variable ait une valeur négative $-x$; la fonction $L(1-x)$ a pour dérivée $\frac{-1}{1-x}$, expression qui se développe de la manière suivante

$$\frac{-1}{1-x} = - \left(1 + x + x^2 + \dots \dots \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} \right).$$

En prenant les fonctions primitives des deux membres et désignant par $\varphi(x)$ celle des fonctions primitives de $\frac{x^n}{1-x}$ qui s'évanouit avec x , nous aurons

$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdot \dots \dots \dots - \frac{x^n}{n} - \varphi(x).$$

Désignons par ε une quantité très-petite, mais déter-

minée, et supposons que x soit moindre que $1-\alpha$; la valeur de la fonction $\frac{x^n}{1-x}$ sera positive et inférieure à $\frac{x^n}{\alpha}$ (car le dénominateur $1-x$ est plus grand que α), et l'on aura

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &> 0, \\ \varphi'(x) - \frac{x^n}{\alpha} &< 0.\end{aligned}$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que la fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive et s'évanouissant avec x , a une valeur positive, que la fonction $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$, ayant sa dérivée négative et s'évanouissant avec x , a une valeur négative. Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$; cette fonction tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et l'on obtient la série convergente

$$(2) \quad L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$$

Comme la quantité α , dont nous avons fait usage dans la démonstration, peut être prise aussi petite que l'on veut, la série (2) reste convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à l'unité.

Remarquons que la série (2) se déduit de la série (1) en changeant x en $-x$; ainsi la série (1) est convergente et égale à la fonction $L(1+x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. La série (1) reste convergente pour $x=+1$, mais elle ne l'est plus pour $x=-1$, et en effet, $L(0) = \infty$.

Développement de ARC TANG X.

117. La fonction *arc tang x* a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Par la division, cette dérivée se développe de la manière suivante

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots \mp x^{2n-2} \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Prenons les fonctions primitives des deux membres. Le premier membre a pour fonction primitive *arc tang x*, le second

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \varphi(x),$$

en désignant par $\varphi(x)$ celle des fonctions primitives de la fonction $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ qui s'annule pour $x=0$. Ces deux fonctions primitives, ayant leurs dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante; mais elles deviennent toutes deux égales à zéro pour $x=0$; donc elles restent constamment égales, et l'on a

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \varphi(x).$$

Supposons la variable x positive et inférieure ou égale à l'unité. La valeur de la fonction $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ étant positive et inférieure à x^{2n} , on a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &> 0, \\ \varphi'(x) - x^{2n} &< 0. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive, croît avec x ;

comme elle s'évanouit pour $x=0$, elle prend des valeurs positives croissantes quand x croît de 0 à 1. La fonction $\varphi(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, ayant sa dérivée négative, décroît quand x croît; comme elle s'évanouit aussi avec x , elle prend des valeurs négatives quand x croît de 0 à 1. On a donc

$$\varphi(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < 0,$$

ou

$$\varphi(x) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Lorsque n augmente indéfiniment, x étant inférieure ou égale à l'unité, $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et par suite $\varphi(x)$ tendent vers zéro, et le développement se prolonge en série convergente

$$(3) \quad \text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \dots \dots$$

Cette série subsiste lorsque la valeur de x est négative, parce que la fonction $\text{arc tang } x$ change de signe en même temps que le second membre quand on remplace x par $-x$. Ainsi la série (3) reste convergente et représente la fonction $\text{arc tang } x$ pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et même pour ces valeurs limites.

CALCUL DES LOGARITHMES AU MOYEN DE LA SÉRIE QUI DONNE
LE LOGARITHME DE $n+1$, QUAND ON CONNAÎT CELUI DE n .
— CALCUL DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS. — VALEUR DU
MODULE DES LOGARITHMES VULGAIRES. — CALCUL DES LO-
GARITHMES VULGAIRES.

418. Nous nous proposons de trouver une série donnant
la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers
consécutifs n et $n+1$. Puisque

$$L(n+1) - Ln = L \frac{n+1}{n} = L \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

si dans la série (1) on remplace x par la fraction $\frac{1}{n}$, on a
la série

$$L(n+1) - Ln = \frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + \frac{1}{3.n^3} \cdot \dots \dots \dots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement et
il faudrait prendre un grand nombre de termes pour avoir
les logarithmes avec une certaine approximation.

On arrive à une série beaucoup plus rapidement con-
vergente de la manière suivante : Si l'on retranche l'une
de l'autre les deux séries obtenues précédemment

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdot \dots \dots \dots$$

$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdot \dots \dots \dots$$

les termes de degré pair se retranchent, ceux de degré
impair s'ajoutent, et l'on a

$$L(1+x) - L(1-x) = L \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdot \dots \dots \right).$$

Posons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

d'où

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

et remplaçons x par sa valeur, nous obtiendrons la série

$$\begin{aligned} (4) \quad L \frac{n+1}{n} &= L(n+1) - Ln \\ &= 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right], \end{aligned}$$

qui converge d'autant plus rapidement que le nombre n est plus grand.

Calcul des logarithmes népériens.

119. C'est au moyen de la série (4) que l'on calcule les logarithmes népériens.

En faisant $n = 1$ dans cette série, on a

$$L2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right).$$

On commencera par réduire en décimales les fractions $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^5}, \dots$, en divisant successivement par 9; puis on les divisera par les nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... Les dix premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L2 = 0,6931471806.$$

Si dans la série (4) on fait $n = 2$, on a

$$L_3 - L_2 = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \dots \right).$$

On abrège le calcul en remarquant que diviser par 25 revient à diviser par 100 et à multiplier par 4. Les sept premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L_3 = 1,09861\ 22887.$$

On obtient L_4 en doublant simplement L_2 , d'où

$$L_4 = 1,38629\ 43611.$$

On calculera ensuite L_5 par la série

$$L_5 - L_4 = 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots \right).$$

Les fractions $\frac{1}{9}, \frac{1}{9^3}, \frac{1}{9^5}, \dots$, s'obtiennent en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^5}, \dots$. Les cinq premiers termes donnent avec dix décimales exactes

$$L_5 = 1,60943\ 79124.$$

On obtiendra L_6 en ajoutant L_3 et L_2 . On calculera L_7 par la série en faisant $n = 6$, et ainsi de suite indéfiniment.

Calcul du module.

120. Une fois qu'on a trouvé L_3 et L_5 , l'addition de ces deux logarithmes donne

$$L_{10} = 2,30258\ 50930.$$

On sait que le module M des logarithmes vulgaires est

égal à $\frac{1}{L_{10}}$ (n° 72) ; divisant 1 par L_{10} , on aura la valeur de ce module

$$M = 0,43429\ 44820.$$

Calcul des logarithmes vulgaires.

121. On obtient les logarithmes vulgaires en multipliant par le module les logarithmes népériens. La série (4) devient ainsi

$$(5) \quad \log(n+1) - \log n \\ = 2M \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{5(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right].$$

C'est cette dernière série que l'on emploiera pour calculer les logarithmes vulgaires.

On multipliera d'abord par M les logarithmes népériens L_2 , L_3 , L_4 et L_5 qui ont servi à trouver le module, et on continuera à l'aide de la série (5). Cette série convergeant de plus en plus à mesure que l'on s'élève dans l'échelle des nombres entiers, les calculs deviendront bientôt extrêmement rapides. On aura, par exemple, le logarithme de 101 avec huit décimales exactes au moyen de deux termes seulement

$$\log 101 - 2 = 2M \left(\frac{1}{201} + \frac{1}{3 \cdot 201^3} \right).$$

Le premier terme suffira pour le logarithme de 1001

$$\log 1001 - 3 = 2M \frac{1}{2001},$$

et à plus forte raison au delà. A partir du moment où l'on pourra réduire la série à son premier terme

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1},$$

on fera le calcul en divisant la quantité constante $2M = 0,868588964$ par le nombre variable $2n+1$.

CALCUL DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE
D'APRÈS LA SÉRIE *arc tang x*.

122. Nous avons trouvé (n° 117) la série

$$(3) \quad \text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots;$$

convergentes pour toutes les valeurs de x plus petites que 1 et même pour $x = 1$. Cette série permet de calculer la longueur d'un arc dont on connaît la tangente; il en résulte plusieurs manières de déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.

1° L'arc qui a pour tangente l'unité est la moitié du quadrant ou $\frac{\pi}{4}$. En faisant $x = 1$ dans la série, on a donc

$$(6) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement et il faudrait un trop grand nombre de termes pour obtenir π avec quelque approximation. On a recours à d'autres procédés.

2° En appelant a l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{2}$, on a la série

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots$$

qui converge plus rapidement que la précédente, et qui donne une portion a du demi-quadrant $\frac{\pi}{4}$. Pour avoir la partie complémentaire, je pose

$$b = \frac{\pi}{4} - a,$$

et je prends les tangentes des deux membres

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} a} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi l'arc b a pour tangente $\frac{1}{3}$, et se développe de la manière suivante

$$b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots$$

En ajoutant les deux arcs a et b , on a

$$(7) \quad \frac{\pi}{4} = a + b = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots \right).$$

De cette manière l'arc $\frac{\pi}{4}$ est donné par la somme de deux séries.

3° Je pars maintenant de l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{3}$, et j'appelle a cet arc,

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots$$

Je double cet arc ; j'ai

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} = \frac{3}{4}.$$

L'arc $2a$ est encore plus petit que $\frac{\pi}{4}$; j'appelle b la différence

$$b = \frac{\pi}{4} - 2a,$$

d'où

$$\operatorname{tang} b = \frac{1 - \operatorname{tang} 2a}{1 + \operatorname{tang} 2a} = \frac{1}{7}.$$

L'arc b qui a pour tangente $\frac{1}{7}$ est donné par la série

$$b = \frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \dots$$

On a donc

$$(8) \quad \frac{\pi}{4} = 2a + b = 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \dots \right)$$

4° On obtient des séries très-rapidement convergentes en partant de l'arc a qui a pour tangente $\frac{1}{5}$,

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots$$

Je double cet arc ; j'ai

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12};$$

Je double encore une fois ; j'ai

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Cette dernière tangente étant un peu plus grande que l'unité, il s'ensuit que l'arc $4a$ est un peu plus grand que $\frac{\pi}{4}$; j'appelle b la différence

$$b = 4a - \frac{\pi}{4},$$

et je calcule la tangente de cet arc,

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

L'arc très-petit b , dont la tangente est $\frac{1}{239}$, sera donné par la série

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{\pi}{4} = 4a - b &= 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ces deux séries convergent très-rapidement, surtout la seconde. Aussi cette dernière formule est-elle de beaucoup préférable à celles que nous avons données précédemment.

123. Voici le calcul de π avec 15 décimales exactes, au moyen de la formule (9).

Calcul de a.

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{5^2} = 0,008$$

$$\frac{1}{5^3} = 0,00032$$

$$\frac{1}{5^4} = 0,0000128$$

$$\frac{1}{5^5} = 0,000000512$$

$$\frac{1}{5^6} = 0,00000002048$$

$$\frac{1}{5^7} = 0,0000000008192$$

$$\frac{1}{5^8} = 0,000000000032768$$

$$\frac{1}{5^9} = 0,00000000000131072$$

$$\frac{1}{5^{10}} = 0,00000000000005243$$

$$\frac{1}{5^{11}} = 0,00000000000000210$$

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{5.5^2} = 0,0000064$$

$$\frac{1}{9.5^3} = 0,00000005638888889$$

$$\frac{1}{13.5^{13}} = 0,0000000000006501538$$

$$\frac{1}{17.5^{17}} = 0,000000000000007710$$

$$\frac{1}{21.5^{21}} = 0,000000000000000010$$

$$0,20006405695198147$$

$$\frac{1}{3.5^2} = 0,00266666666666667$$

$$\frac{1}{7.5^7} = 0,000000182857142857$$

$$\frac{1}{11.5^{11}} = 0,000000000186181818$$

$$\frac{1}{15.5^{15}} = 0,00000000000218453$$

$$\frac{1}{19.5^{19}} = 0,00000000000000276$$

$$0,00266849710210071$$

$$a = 0,19759555984988076$$

Calcul de b.

$$\frac{1}{259} = 0,00418\ 41004\ 18410\ 04$$

$$\frac{1}{259^3} = 0,00000\ 00732\ 49775\ 36$$

$$\frac{1}{259^5} = 0,00000\ 00000\ 01282\ 36$$

$$\frac{1}{259} = 0,00418\ 41004\ 18410\ 04$$

$$\frac{1}{5\ 259^3} = 0,00000\ 00000\ 00256\ 45$$

$$\frac{1}{3.259^3} = 0,00418\ 41004\ 18666\ 49$$

$$\frac{1}{3.259^3} = 0,00000\ 00244\ 16591\ 79$$

$$b = 0,00418\ 40760\ 02074\ 70$$

Calcul de π .

$$4a = 0,78958\ 22393\ 99523\ 04$$

$$b = 0,00418\ 40760\ 02074\ 70$$

$$\frac{\pi}{4} = 4a - b = 0,78539\ 81633\ 97448\ 34$$

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 36$$

Il faut prendre onze termes dans la première série, trois dans la seconde. Les puissances impaires de $\frac{1}{5}$ se déduisent les unes des autres en divisant par 25, c'est-à-dire en multipliant par 4 et divisant par 100. Nous avons fait le calcul avec 17 décimales; comme on a multiplié deux fois par 4, d'abord pour trouver a et ensuite π , on ne peut compter sur les deux dernières décimales que l'on supprimera; on aura donc π avec quinze décimales exactes

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793.$$

Questions à résoudre.

QUESTION I. Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

$$1^{\circ} \quad y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}. \quad \text{Réponse : } y' = \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2^{\circ} \quad y = \tan x - \cot x, \quad y' = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$3^{\circ} \quad y = x(Lx-1), \quad y' = Lx.$$

$$4^{\circ} \quad y = e^x(x-1), \quad y' = xe^x.$$

$$5^{\circ} \quad y = x \sin x + \cos x, \quad y' = x \cos x.$$

$$6^{\circ} \quad y = -x \cos x + \sin x, \quad y' = x \sin x.$$

$$7^{\circ} \quad y = \frac{1}{2} L \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad y' = \frac{1}{x^2-1},$$

$$8^{\circ} \quad y = L(x + \sqrt{x^2-1}), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$9^{\circ} \quad y = L \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right), \quad y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10^{\circ} \quad y = \arccos \left(\frac{a-2x}{a} \right), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

$$11^{\circ} \quad y = \frac{1}{6} L \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad y' = \frac{1}{x^2-1},$$

QUESTION II. Dans un demi-cercle inscrire un trapèze de surface maximum.

Réponse. Le trapèze maximum est la moitié d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle.

QUESTION III. Parmi tous les parallépipèdes rectangles à base carrée de même surface totale, quel est celui qui a le plus grand volume ?

Réponse. Le cube.

QUESTION IV. Sur les faces d'un cube on élève six pyramides régulières de même hauteur. Parmi tous les corps de même surface ainsi formés, quel est celui qui a le plus grand volume ?

QUESTION V. Parmi toutes les niches de même surface quelle est celle qui a le plus grand volume ?

Réponse. Le volume est maximum quand l'élévation de la niche égale le diamètre de la base.

QUESTION VI. Sur la droite qui joint deux lumières, trouver le point le plus éclairé par ces deux lumières.

Réponse. Il faut partager la droite qui joint les deux lumières proportionnellement aux racines cubiques des intensités.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

COMMENT VARIE UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ QUAND x VARIE
D'UNE MANIÈRE CONTINUE ENTRE $-\infty$ ET $+\infty$.

124. LEMME II. *Quand un polynôme entier en x ne contient pas de terme constant, on peut donner à x une valeur assez petite pour que le polynôme ait une valeur plus petite que toute quantité donnée.*

Soit

$$ax + bx^2 + cx^3 + \dots + kx^n$$

un polynôme entier en x ne renfermant pas de terme constant, et ordonné suivant les puissances croissantes de x . Je dis qu'on peut donner à x une valeur assez petite, abstraction faite du signe, pour que la valeur absolue du polynôme soit plus petite qu'une quantité donnée α , quelque petite qu'elle soit. En effet, si l'on désigne par M le plus grand coefficient en valeur absolue, et par y la valeur absolue du polynôme, on a évidemment

$$y < M(x + x^2 + x^3 + \dots),$$

puisqu'on remplace tous les coefficients par le plus grand d'entre eux et qu'on a pris tous les termes positivement; on peut aussi prolonger la série à l'infini, en supposant x inférieure à l'unité, afin de rendre la série convergente. Faisons la somme des termes, il vient

$$y < \frac{Mx}{1-x}.$$

La question sera satisfaite si l'on rend le second membre plus petit que α ; posons donc

$$\frac{Mx}{1-x} < \alpha,$$

d'où

$$x < \frac{\alpha}{M + \alpha}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{\alpha}{M + \alpha}$ et $+\frac{\alpha}{M + \alpha}$, le polynôme aura une valeur comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Par exemple, la valeur du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera comprise entre $-0,1$ et $+0,1$, quand la variable x sera comprise entre $-\frac{1}{91}$ et $+\frac{1}{91}$, ou plus simplement entre $-0,01$ et $+0,01$.

123. LEMME II. *Quand un polynôme entier est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x , on peut donner à la variable une valeur assez petite pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, et, par conséquent donne son signe au polynôme.*

Soit

$$y = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \dots$$

le polynôme proposé; je le mets sous la forme

$$y = x^n(a + bx + cx^2 + \dots).$$

Nous venons de démontrer que l'on peut donner à x une valeur assez petite numériquement pour que la valeur absolue du polynôme

$$bx + cx^2 + \dots$$

soit inférieure à celle de a . Pour ces valeurs de x , le premier terme du polynôme proposé sera plus grand que la somme de tous les autres et donnera son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera plus grand que la somme de tous les autres pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{2}{11}$ et $+\frac{2}{11}$.

126. LEMME III. *Quand un polynôme entier est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , on peut donner à x une valeur assez grande pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres et, par conséquent, donne son signe au polynôme.*

Soit le polynôme

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots$$

Mettant x^m en facteur, je l'écris sous la forme

$$y = x^m \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \dots \right).$$

Le polynôme entre parenthèse est ordonné par rapport aux puissances croissantes de la variable $\frac{1}{x}$; en vertu du lemme précédent, on peut prendre $\frac{1}{x}$ assez petit, c'est-à-dire x assez grand, en valeur absolue, pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres et, par conséquent, donne son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 7$$

surpassera la somme de tous les autres pour toutes les valeurs de $\frac{1}{x}$ plus petites que $\frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$, et par conséquent pour toutes les valeurs de x plus grandes que 5, en valeur absolue.

127. THÉOREME I. *Une fonction entière $f(x)$ varie d'une manière continue quand x varie d'une manière continue.*

Si l'on donne à la variable x un accroissement h , la fonction éprouve l'accroissement (n° 80)

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \dots$$

Le second nombre étant un polynôme entier en h qui ne renferme pas de terme constant, on peut donner à h une valeur numérique assez petite pour que ce polynôme ait une valeur absolue plus petite que toute quantité donnée. Ainsi à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction et, par conséquent, lorsque la variable x varie d'une manière continue, la fonction varie aussi d'une manière continue.

128. REMARQUE. Il est aisé de voir que si la variable x augmente indéfiniment en valeur absolue, la fonction augmente aussi indéfiniment. En effet, mettons le polynôme

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots$$

sous la forme

$$f(x) = x^m \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \dots \right).$$

Quand x est très-grand ou $\frac{1}{x}$ très-petit, la valeur de la parenthèse diffère très-peu de la quantité fixe a ; le premier facteur x^m augmente indéfiniment; donc le produit devient plus grand que toute quantité donnée.

Supposons, pour fixer les idées, le premier coefficient positif; lorsque x tend vers $+\infty$, le polynôme tend aussi vers $+\infty$; lorsque x tend vers $-\infty$, le polynôme tend vers $-\infty$ s'il est de degré impair, et vers $+\infty$ s'il est de degré pair. Ainsi, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction varie de $-\infty$ à $+\infty$ si m est impair; si m est pair, elle part de $+\infty$ pour revenir à $+\infty$. Dans l'intervalle elle peut éprouver des alternatives de croissance et de décroissance.

Le signe de la dérivée $f'(x)$ indique si la fonction croît ou décroît; cette dérivée, étant un polynôme entier en x , conserve toujours le signe de son premier terme au delà d'une certaine limite, à partir de laquelle la fonction n'éprouvera plus aucune alternative d'augmentation et de diminution. En supposant comme précédemment le premier coefficient positif, la dérivée restera constamment positive et la fonction ira en augmentant indéfiniment, à partir d'une certaine valeur de x .

LORSQUE DEUX NOMBRES a ET b SUBSTITUÉS DANS UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ DONNENT DES RÉSULTATS DE SIGNES CONTRAIRES. L'ÉQUATION $f(x) = 0$ A AU MOINS UNE RACINE RÉELLE COMPRISE ENTRE a ET b . — TOUTE FONCTION $f(x)$, QUI RESTE CONTINUE POUR TOUTES LES VALEURS DE x COMPRISES ENTRE a ET b , JOUIT DE CETTE PROPRIÉTÉ.

129. Ceci résulte de la continuité de la fonction. Soit a plus petit que b , et supposons, par exemple, que le polynôme $f(x)$ ait une valeur négative pour $x = a$, une valeur positive pour $x = b$. Si l'on imagine que x croisse d'une manière continue de a à b , la fonction variera d'une manière continue, allant d'une valeur négative à une valeur positive; comme elle reste finie, elle devra nécessairement, dans l'intervalle, passer par la valeur intermédiaire zéro. Ainsi la fonction $f(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise entre a et b ; cette valeur de x est racine de l'équation $f(x) = 0$.

Il est possible que la fonction passe plusieurs fois par zéro dans l'intervalle de a à b ; dans ce cas l'équation admet plusieurs racines réelles comprises entre a et b .

Toute fonction finie et continue jouit évidemment de cette propriété.

UNE ÉQUATION ALGÈBRE DE DEGRÉ IMPAIR A AU MOINS UNE RACINE RÉELLE

130. On appelle équation algébrique une équation obtenue en égalant à zéro une fonction entière $f(x)$. On peut toujours supposer le premier coefficient positif; s'il était négatif, on changerait tous les signes. Si l'on donne à x

une valeur négative très-grande, le polynôme prend une valeur de même signe que celle de son premier terme, c'est-à-dire une valeur négative, puisque ce premier terme est de degré impair. Au contraire, si l'on donne à x une valeur positive très-grande, le polynôme prend une valeur positive. Ainsi quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le polynôme $f(x)$ change de signe et s'annule au moins une fois; donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle.

Cette racine réelle a un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation. Supposons d'abord que le dernier terme, c'est-à-dire le terme indépendant de x , soit négatif; pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative; pour une valeur très-grande positive, il a une valeur positive; donc le polynôme change de signe quand x varie de 0 à $+\infty$ et, par conséquent, l'équation admet une racine positive. Supposons maintenant que le dernier terme soit positif; pour $x = -\infty$, le polynôme est négatif, pour $x = 0$ il est positif; il change donc de signe quand x varie de $-\infty$ à 0 et, par conséquent, l'équation admet une racine négative.

On peut affirmer, par exemple, que l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = 0$$

a au moins une racine réelle positive, et que l'équation

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

a au moins une racine réelle négative.

UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE DE DEGRÉ PAIR, DONT LE DERNIER TERME EST NÉGATIF, A AU MOINS DEUX RACINES RÉELLES.

131. Pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative. D'ailleurs une valeur

de x très-grande, soit positive, soit négative, rend le polynôme positif, puisque son premier terme, qui est de degré pair, reste toujours positif. Ainsi le polynôme change deux fois de signe, une fois de 0 à $+\infty$, une seconde fois de 0 à $-\infty$; donc l'équation admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Par exemple, l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il n'est qu'un cas où l'on ne sait pas si l'équation admet une racine réelle; c'est celui où l'équation, étant de degré pair, a son dernier terme positif; car, dans ce cas, le polynôme ne change pas de signe et reste positif quand x varie de 0 à $+\infty$ ou de 0 à $-\infty$. Ainsi on ne sait pas si l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = 0$$

admet une racine réelle.

TOUTE ÉQUATION ALGÈBRE $f(x) = 0$, À COEFFICIENTS RÉELS OU IMAGINAIRES DE LA FORME $a + b\sqrt{-1}$, A UNE RACINE RÉELLE OU IMAGINAIRE DE LA MÊME FORME. — (On ne demandera pas à l'examen la démonstration de ce théorème.)

Nous admettrons ce théorème sans démonstration, nous bornant à en bien préciser le sens.

Si dans un polynôme entier $f(x)$, on remplace x par la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, et que l'on développe chaque puissance de x de la manière indiquée au n° 48, on trouvera une quantité de la forme $A + B\sqrt{-1}$; multi-

pliant cette puissance par le coefficient, on obtiendra un résultat de la même forme; réunissant enfin les parties réelles et les parties imaginaires, on arrivera à un résultat final de la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Or on dit qu'une quantité imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ est nulle lorsque les deux quantités réelles P et Q sont nulles séparément. Le théorème signifie que l'on peut déterminer a et b de telle sorte que l'on ait à la fois $P = 0$ et $Q = 0$, et la valeur $x = a + b\sqrt{-1}$ est dite racine de l'équation.

SI a EST RACINE D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE, LE PREMIER MEMBRE EST DIVISIBLE PAR $x - a$.

132. Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , on peut diviser ce polynôme par $x - a$ et pousser l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de x . Si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient qui est un polynôme entier du $m - 1$ degré, et R le reste constant, on aura

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + R.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x . Donnons à x la valeur particulière a , le premier terme du second membre s'évanouit, puisque le facteur $x - a$ devient nul et que l'autre facteur $\varphi(a)$ conserve une valeur finie; il vient donc

$$f(a) = R.$$

Ainsi, quand on divise un polynôme entier par un binôme de la forme $x - a$, le reste de la division est le résultat que l'on obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme.

Supposons maintenant que a soit racine de l'équa-

tion $f(x)=0$; cela signifie que, si l'on remplace x par a dans le premier membre, on obtient un résultat $f(a)$ égal à zéro. Donc le reste R est nul, et l'on a

$$f(x) = (x - a) \varphi(x).$$

Ainsi, lorsque a est racine d'une équation algébrique $f(x) = 0$, le premier membre est divisible par $x - a$.

Réciproquement, si le premier membre est divisible par un binôme de la forme $x - a$, la quantité a est racine de l'équation. En effet, dire que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, c'est dire que le reste constant R auquel on arrive en effectuant la division est nul; donc la quantité $f(a)$ est égale à zéro et a est racine.

133. Nous allons maintenant indiquer une règle très-simple pour calculer le quotient.

Soit

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 x + A_0$$

le polynôme proposé.

Divisons ce polynôme par $x - a$.

$$\begin{array}{r} A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_{m-1}x + A_m \Big| x-a \\ (A_0x + A_1)x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m \Big| A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \dots + B_{m-1} \\ (B_1a + A_2)x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m \\ (B_1a + A_3)x^{m-3} + \dots + A_m \\ \dots \dots \dots \\ (B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m \\ \text{reste } B_{m-1}a + A_m. \end{array}$$

Le premier terme du quotient est Ax^{m-1} ; multiplions ce terme par le diviseur $x-a$, et retranchons du dividende; le produit par x détruit le premier terme du dividende, le produit par $-a$ donne la quantité A_0ax^{m-1} qui s'ajoute au second terme; ainsi le premier reste ou second divi-

dende a pour premier terme $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, les termes suivants étant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x , on aura le second terme B_1x^{m-2} du quotient, en représentant pour abrégé $A_0a + A_1$ par B_1 ; multiplions ce second terme par $x - a$, le produit par x détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-a$ donne la quantité B_1ax^{m-2} qui s'ajoute au second terme; ainsi le troisième dividende a pour premier terme $(B_1a + A_2)x^{m-2}$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x , on aura le troisième terme B_2x^{m-3} du quotient, en représentant $B_1a + A_2$ par B_2 , et ainsi de suite.

Cette loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant celui du terme de même rang dans le polynôme proposé.

On arrivera ainsi au dernier dividende $(B_{m-1}a + A_m)x + A_m$, qui donnera le dernier terme B_{m-1} du quotient, B_{m-1} représentant la quantité $B_{m-1}a + A_m$; en multipliant ce dernier terme par $x - a$ et retranchant du dernier dividende, on aura le reste de la division $B_{m-1}a + A_m$. On voit par là que le reste de la division se forme au moyen du dernier terme du quotient suivant la même loi, en multipliant le dernier terme du quotient par a et ajoutant le dernier terme du dividende.

Les coefficients du quotient, formés d'après cette loi, ont pour valeurs

$$B_1 = A_0a + A_1,$$

$$B_2 = A_0a^2 + A_1a + A_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_{m-1} = A_0a^{m-1} + A_1a^{m-2} \dots\dots + A_{m-1},$$

et le reste de la division

$$B_{m-1}a + A_m = A_0a^m + A_1a^{m-1} + \dots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x-3$ le polynôme

$$2x^3 - 8x^2 + 7x^2 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^2 - 2x^2 + x^2 - 5x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3 6 et -8 -2 ; -2 multiplié par 3 -6 et $+7$ $+1$; $+1$ multiplié par 3 $+3$ et -6 -3 ; -3 multiplié par 3 -9 et $+5$ -4 . Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme 12 du dividende, on trouve le reste 0; donc 3 est racine de l'équation obtenue en égalant le polynôme proposé à zéro.

2° Diviser par $x+2$ le polynôme

$$2x^3 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^2 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a = -2$, on dira donc : 2 multiplié par -2 -4 et $+1$ -3 ; -3 multiplié par -2 $+6$ et -10 -4 ; -4 multiplié par -2 $+8$ et -2 $+6$. En multipliant le dernier terme du quotient par -2 et ajoutant $+5$, on obtient le reste -7 de la division. Donc -2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x-2$ le polynôme

$$x^8 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^3 + 2x - 8.$$

Le polynôme n'est pas complet; il ne contient pas de termes en x^7 , x^6 et x^2 ; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 13x^3 + 2x - 8;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x + 4$$

et le reste nul. Donc 3 est racine.

UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE DU DEGRÉ m A TOUJOURS m RACINES RÉELLES OU IMAGINAIRES, ET ELLE NE PEUT EN AVOIR D'AVANTAGE. — DÉCOMPOSITION DU PREMIER MEMBRE EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ.

134. Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m . Nous avons admis que l'équation $f(x) = 0$ a toujours une racine réelle ou imaginaire, et nous avons démontré que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x-a$. En appelant X_1 le quotient qui est un polynôme entier du degré $m-1$, on a

$$f(x) = (x-a)X_1.$$

Mais l'équation $X_1 = 0$ admet de même une racine b , et le polynôme X_1 est divisible par $x-b$, ce qui donne

$$X_1 = (x-b)X_2,$$

le quotient X_2 étant un polynôme entier du degré $m-2$.

L'équation $X_1 = 0$ admettant une racine c , le polynôme X_1 est divisible par $x - c$, et l'on a

$$X_1 = (x - c)X_2,$$

le quotient X_2 étant un polynôme du degré $m - 3$. En continuant de la même manière, on arrivera à un polynôme X_{m-1} du premier degré; l'équation $X_{m-1} = 0$ admet une racine k , et le polynôme s'écrit

$$X_{m-1} = A(x - k),$$

le dernier quotient A étant indépendant de x . Si l'on multiplie entre elles toutes ces égalités, les polynômes intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k).$$

Ainsi tout polynôme entier du degré m peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré.

Le facteur constant A est égal au premier coefficient du polynôme, parce que si l'on fait la multiplication, le premier terme du produit est Ax^m .

135. *Un polynôme ne peut être décomposé qu'en un seul système de facteurs du premier degré.* En effet, supposons qu'un autre mode de décomposition ait donné

$$f(x) = A'(x - a')(x - b')(x - c') \dots (x - k').$$

Nous remarquons d'abord que les deux coefficients A et A' sont égaux, comme étant tous deux égaux au premier coefficient du polynôme. Les deux produits sont égaux pour toutes les valeurs de x ; donnons à x la valeur particulière a ; le premier produit, contenant le facteur $x - a$, s'annule; le second, qui est égal au premier, doit s'annuler

aussi; pour cela il est nécessaire que l'un des facteurs s'annule, c'est-à-dire que la quantité a soit égale à l'une des quantités $a', b', \dots$; supposons $a = a'$; il en résulte que les deux produits contiennent tous deux le même facteur $x - a$. Si l'on divise ces deux produits égaux par $x - a$, on aura deux quotients

$$(x - b)(x - c) \dots (x - k) = (x - b')(x - c') \dots (x - k')$$

égaux pour toutes les valeurs de x . En donnant à x la valeur particulière b , on démontrera de même que le facteur $x - b$ du premier membre se trouve dans le second. On divisera par ce facteur commun et l'on continuera de la même manière jusqu'au dernier facteur. Ainsi les deux produits égaux sont composés identiquement des mêmes facteurs.

136. Il résulte de là qu'une équation algébrique du degré m a toujours m racines réelles ou imaginaires et n'en a que m . Soit l'équation $f(x) = 0$, dont le premier membre est un polynôme entier du degré m . Nous venons de démontrer que ce polynôme peut être décomposé en un produit de m facteur du premier degré

$$f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k).$$

Si l'on remplace x par l'une quelconque des m quantités $a, b, c, \dots, k$, l'un des facteurs du second membre s'annule; les autres facteurs conservant des valeurs finies, le produit s'annule aussi. Donc l'équation admet les m racines $a, b, c, \dots, k$.

L'équation n'admet pas d'autres racines que celles dont nous venons de parler; car toute valeur de x , autre que $a, b, c, \dots, k$ n'annulera aucun des facteurs, et, par conséquent, n'annulera pas le produit $f(x)$.

137. REMARQUE I. — Dans cette démonstration, nous nous appuyons sur ce principe que, pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul, il est nécessaire et il suffit que l'un des facteurs soit nul. Ce principe est évident quand les facteurs sont réels; mais il a besoin de quelques explications quand les facteurs sont imaginaires.

On appelle *module* d'une quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ le nombre positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On dit qu'une quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ est nulle, quand on a séparément $a = 0$ et $b = 0$. On voit que, lorsqu'une quantité imaginaire est nulle, son module est nul, et que réciproquement, si le module est nul, la quantité imaginaire est nulle; car la somme des deux nombres positifs a^2 et b^2 ne peut devenir nulle que si ces deux nombres sont nuls séparément.

Considérons le produit de deux quantités imaginaires

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2 \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')i;\end{aligned}$$

ce produit a pour module

$$\begin{aligned}\sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2} &= \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}.\end{aligned}$$

On voit par là que le *module d'un produit de plusieurs facteurs est égal au produit des modules*. Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque de facteurs.

Cela posé, soit le produit de plusieurs quantités imaginaires

$$A + Bi = (a + bi)(a' + b'i)(a'' + b''i) \dots$$

Le module du produit étant égal au produit du module, on a

$$A^2 + B^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2) \dots$$

Pour que le produit soit nul, il est nécessaire et il suffit que son module soit nul ; ce module étant égal au produit de plusieurs nombres positifs, il est nécessaire et il suffit que l'un d'eux soit nul, c'est-à-dire que l'une des quantités imaginaires soit nulle.

138. REMARQUE II. — Nous pouvons maintenant préciser davantage le sens du théorème démontré au n° 129. Nous avons dit que, lorsque deux nombres réels, que nous appellerons x_0 et x_1 , mis à la place de x dans le polynôme $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$ (Il est bien entendu que l'équation est supposée avoir tous ses coefficients réels). Nous pouvons ajouter que si ces deux nombres comprennent plus d'une racine, ils en comprennent un nombre impair, et qu'en outre, lorsque les deux nombres x_0 et x_1 donnent des résultats de même signe, ils ne comprennent aucune racine, ou en comprennent un nombre pair.

Désignons par $a, b, \dots, e$ les diverses racines comprises entre x_0 et x_1 , et écrivons le polynôme $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - e)\varphi(x),$$

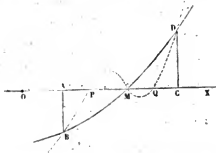
$\varphi(x)$ représentant le produit des facteurs qui correspondent aux autres racines. En remplaçant x successivement par x_0 et x_1 , on a

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (x_0 - a)(x_0 - b) \dots (x_0 - e)\varphi(x_0), \\ f(x_1) &= (x_1 - a)(x_1 - b) \dots (x_1 - e)\varphi(x_1). \end{aligned}$$

Nous remarquerons d'abord que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont des quantités de même signe ; autrement, les deux nombres

x_0 et x_1 comprendraient encore une autre racine, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons x_0 plus petit que x_1 : le nombre x_1 étant plus grand que les racines $a, b, \dots, e$, chacun des facteurs $x_1 - a, x_1 - b, \dots, x_1 - e$, est positif, donc $f(x_1)$ a le signe de $\varphi(x_1)$. Le nombre x_0 étant plus petit que les racines $a, b, \dots, e$, chacun des facteurs $x_0 - a, x_0 - b, \dots, x_0 - e$ est négatif. Si le nombre de ces facteurs est pair, $f(x_0)$ aura le même signe que $\varphi(x_0)$, et, par conséquent, que $f(x_1)$; si le nombre des facteurs est impair, $f(x_0)$ aura un signe contraire à celui de $\varphi(x_0)$, et par conséquent contraire à celui de $f(x_1)$. Ainsi les deux résultats $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe ou des signes contraires, selon que le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1 est pair ou impair.

Des considérations géométriques très-simples font bien comprendre cette proposition. Imaginons que l'on représente par une courbe la fonction $f(x)$, comme nous l'avons expliqué au n° 82, en portant sur un axe horizontal OX , à partir d'un point fixe O les valeurs de x , et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de la fonction, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe. Les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ corres-

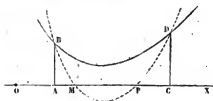


pondent aux points où l'ordonnée devient nulle, c'est-à-dire

où la courbe coupe l'axe OX . Si la courbe coupe l'axe au point M , la longueur OM est une racine de l'équation.

Supposons que deux valeurs OA et OC de la variable x donnent au polynôme des valeurs de signes contraires $-AB$ et $+CD$; pour aller du point B au point D , la courbe devra nécessairement couper l'axe OX en un certain point M , et l'équation admettra une racine OM comprise entre OA et OC . Mais la courbe peut couper l'axe en plusieurs points, comme le montre la ligne ponctuée; dans ce cas elle le coupe en un nombre impair de points P, M, Q .

Supposons maintenant que les deux valeurs OA et OC de la variable x donnent à la fonction des valeurs $+AB$ et $+CD$ de même signe. En général, la courbe ira du point



B au point D sans rencontrer l'axe OX , et l'équation n'aura pas de racine dans l'intervalle; si elle coupe l'axe, elle le coupera en un nombre pair de points M, P , et l'équation aura un nombre pair de racines dans l'intervalle.

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE ET LES RACINES.

139. Supposons que l'on ait divisé tous les termes de l'équation par le premier coefficient, afin de la ramener à la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n = 0.$$

Cette équation a m racines $a, b, c, \dots, k$, et nous avons démontré que le premier membre $f(x)$ peut être décomposé en un produit de m facteurs binômes

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-k).$$

Si l'on effectue ce produit, il est clair que l'on reproduira identiquement le polynôme proposé. Or si l'on appelle S_1 la somme des racines, S_2 la somme des produits des racines deux à deux, S_3 la somme des produits trois à trois, ..., le produit des m facteurs binômes, d'après la formule établie au n° 40, se développera de la manière suivante :

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} \dots \pm S_m.$$

En égalant les coefficients des deux polynômes, on a donc

$$A_1 = -S_1, \quad A_2 = S_2, \quad A_3 = -S_3, \dots$$

Ainsi, quand le premier coefficient de l'équation est l'unité, 1° la somme des racines égale le second coefficient changé de signe; 2° la somme des produits des racines deux à deux égale le troisième coefficient; 3° la somme des produits des racines trois à trois égale le quatrième coefficient changé de signe, et ainsi de suite. Enfin le produit des racines égale le dernier terme pris avec son signe ou un signe contraire, suivant que m est pair ou impair.

Exemples.

1° Nous avons déjà reconnu ces relations dans l'équation du second degré (1^{re} partie, n° 146). Si l'on appelle a, b, c les trois racines d'une équation du troisième degré

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

on a

$$a + b + c = -A_1, \quad ab + ac + bc = A_2, \quad abc = -A_3.$$

2° Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres. Supposons que la racine a soit égale à la somme $b + c$ des deux autres; de la première relation $a + b + c = A_1$ on tire $2a = -A_1$, d'où $a = -\frac{A_1}{2}$. La seconde relation s'écrivant $a(b + c) + bc = A_2$ donne $bc = A_2 - a^2 = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$; donc les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$x^2 + \frac{A_1}{2}x + \left(A_2 - \frac{A_1^2}{4}\right) = 0.$$

La troisième relation donne $bc = -\frac{A_3}{a} = \frac{2A_3}{A_1}$.

Pour que les racines de l'équation du troisième jouissent de la propriété énoncée, il faut donc que les coefficients de l'équation satisfassent à la relation

$$\frac{2A_3}{A_1} = A_2 - \frac{A_1^2}{4}.$$

LORSQU'UNE ÉQUATION ALGÈBRE, DONT LES COEFFICIENTS SONT RÉELS, A UNE RACINE IMAGINAIRE DE LA FORME $a + b\sqrt{-1}$, ELLE A AUSSI POUR RACINE L'EXPRESSION CONJUGUÉE $a - b\sqrt{-1}$.

140. Nous avons dit que, lorsque dans le polynôme $f(x)$ on remplace x par $a + bi$, le polynôme acquiert une valeur

de la forme $P + Qi$. Remplaçons maintenant x par la quantité imaginaire conjuguée $a - bi$; si tous les coefficients sont réels, il est clair que la valeur du polynôme ne différera de la précédente qu'en ce que i aura été changée en $-i$; on aura donc la quantité conjuguée $P - Qi$.

Si $a + bi$ est racine de l'équation $f(x) = 0$, le premier résultat est nul, et l'on a séparément $P = 0$, $Q = 0$; donc le second résultat est également nul, et la quantité $a - bi$ est aussi racine de l'équation. Ainsi, dans une équation algébrique dont les coefficients sont réels, les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux, et par conséquent leur nombre est toujours pair.

Cette proposition n'est vraie que si tous les coefficients sont réels; car s'il y a des coefficients imaginaires, quand on remplace $a + bi$ par $a - bi$, on change le signe de i dans la valeur x , mais non dans les coefficients qui restent constants; on ne peut plus dire alors que le second résultat sera conjugué du premier.

141. REMARQUE. Nous avons démontré qu'un polynôme du degré m se décompose en m facteurs du premier degré; mais, parmi ces facteurs, les uns sont réels, les autres imaginaires. Supposons les coefficients réels et considérons les deux facteurs

$$(x - a - bi)(x - a + bi),$$

qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées; le produit de ces deux facteurs

$$(x - a)^2 + b^2$$

est un polynôme réel du second degré.

Ainsi un polynôme à coefficients réels se décompose en facteurs réels du premier ou du second degré.

DANS UNE ÉQUATION ALGÈBREQUE COMPLÈTE OU INCOMPLÈTE, LE NOMBRE DES RACINES POSITIVES NE PEUT SURPASSER LE NOMBRE DES VARIATIONS. — CONSÉQUENCE RELATIVE AUX RACINES NÉGATIVES.

142. Lorsqu'un polynôme à coefficients réels est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , deux termes consécutifs affectés de signes contraires présentent ce qu'on nomme une *variation*. Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

a trois variations : une du premier au second terme ; une du troisième au quatrième, une du cinquième au sixième. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Lorsqu'on multiplie un polynôme par $x - a$, a étant un nombre positif, on introduit au moins une variation nouvelle dans le polynôme.*

Un polynôme quelconque, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , peut être écrit sous la forme

$$A_n x^n \dots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n \dots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p \dots \dots \dots \pm A_{s+1} x^{s+1} \mp A_s x^s \dots \dots \dots \mp A_0.$$

Le polynôme commence par un groupe de termes positifs, puis vient un groupe de termes négatifs, puis un groupe de termes positifs, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe qui commence au terme $\mp A_s x^s$, à partir duquel il n'y a plus de changement de signes. Chaque groupe contient un nombre quelconque de termes et même un seul terme. Les variations se présentent quand on passe du dernier terme d'un groupe au premier du groupe suivant.

En multipliant ce polynôme par $x - a$, nous aurons

$$\begin{array}{ccccccc} A_m x^{m+1} & \dots & -A_n | x^{n+1} & \dots & +A_p | x^{p+1} & \dots & \mp A_s | x^{s+1} & \dots \\ & & -A_{n+1} a & & +A_{p+1} a & & \mp A_{s+1} a & & \pm A_0 a. \end{array}$$

La multiplication par x conserve à chaque terme son signe et donne la première ligne; la multiplication par $-a$ change tous les signes et donne la seconde ligne. Le premier terme $A_m x^{m+1}$ du produit a le signe $+$; le terme du degré $n+1$, provenant de l'addition de deux termes négatifs, a le signe $-$; quels que soient les signes des termes intermédiaires, il est certain qu'entre ces deux termes de signes contraires, il y a au moins une variation; on retrouve ainsi au produit la première variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^n . De même le terme du degré $p+1$, provenant de l'addition de deux termes positifs, a le signe $+$; entre les deux termes en x^{n+1} et en x^{p+1} , qui sont de signes contraires, il y a au moins une variation, et l'on retrouve ainsi au produit la seconde variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^p . Pour simplifier le raisonnement, nous pouvons réduire le multiplicande aux premiers termes des différents groupes, et ne considérer dans le produit que les termes correspondants, c'est-à-dire ceux dont le degré est supérieur d'une unité; ces termes du produit étant affectés des mêmes signes que les termes correspondants du multiplicande, il est clair que l'on retrouve au produit toutes les variations du multiplicande. Ainsi quand on sera arrivé au terme en x^{s+1} , on aura retrouvé au produit toutes les variations du multiplicande. A partir du terme en x' , le multiplicande ne présente plus aucune variation; mais le terme constant $\mp A_0$ du multiplicande, multiplié par $-a$, donne le dernier terme $\pm A_0 a$ du produit; ce dernier terme ayant un

signe contraire à celui du terme en x^{n+1} , le dernier groupe du produit contiendra encore au moins une variation. On en conclut que le produit contient au moins une variation de plus que le multiplicande.

Il peut arriver que la multiplication par $x-a$ introduise plus d'une variation nouvelle; dans ce cas elle en introduit ou 3, ou 5, ..., en général un nombre impair. En effet, dans chacun des groupes du produit, nous avons retrouvé la variation correspondante du multiplicande; mais dans ce groupe il peut y avoir plus d'une variation; car les termes intermédiaires, provenant de l'addition de deux termes de signes contraires, ont des signes quelconques; mais lorsqu'il y en a plus d'une, il y a un nombre impair, c'est-à-dire une, plus un nombre pair, parce que entre deux termes de signes contraires il y a nécessairement un nombre impair de changements de signes; ainsi chaque groupe du produit pourra introduire un nombre pair de variations nouvelles. Le dernier groupe en introduit un nombre impair; en tout un nombre impair de variations nouvelles.

143. THÉORÈME. *Dans une équation algébrique à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations.*

Soit $f(x)=0$ une équation à coefficients réels ayant un certain nombre de racines positives $a, b, c, \dots g$. Supposons le polynôme $f(x)$ décomposé en facteurs et désignons par $\varphi(x)$ le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines négatives et aux racines imaginaires conjuguées, nous aurons

$$f(x) = (x-a)(x-b) \dots (x-g)\varphi(x).$$

D'après la remarque du n° 141, le polynôme $\varphi(x)$ a aussi ses coefficients réels. Or, si nous multiplions ce

polynôme successivement par chacun des facteurs binômes $x-a$, $x-b$, ..., $x-g$, qui correspondent aux racines positives, chaque multiplication introduisant au moins une variation nouvelle, le produit final $f(x)$ contiendra au moins autant de variations qu'il y a de racines positives.

144. REMARQUE. Si le nombre des racines positives n'est pas égal au nombre des variations, il en diffère d'un nombre pair. Nous remarquons d'abord que le polynôme $f(x)$ a son dernier terme positif, sans quoi il aurait une racine positive, ce qui est contraire à l'hypothèse; ce polynôme contient donc un nombre pair de variations, s'il en contient. D'autre part, nous avons vu que la multiplication par chacun des facteurs $x-a$ introduit un nombre impair de variations, c'est-à-dire une, plus un nombre pair; on aura ainsi finalement dans le polynôme $f(x)$ autant de variations qu'il y a de racines positives, plus une somme de nombres pairs, c'est-à-dire plus un nombre pair de variations.

Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

présente trois variations. Elle ne peut admettre plus de trois racines positives; elle en aura trois ou une.

L'équation

$$x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 6 = 0$$

présente quatre variations; elle ne peut admettre plus de quatre racines positives; elle en aura quatre, ou deux, ou pas du tout.

L'équation

$$x^5 + 4x^3 - 5 = 0$$

présente une seule variation. Elle ne peut avoir plus d'une racine positive, et elle en a certainement une.

145. COROLLAIRE. Si dans l'équation $f(x) = 0$, on change x en $-x$, on obtient une nouvelle équation qui a évidemment pour racines celles de la proposée changées de signes; ainsi les racines négatives de la première deviennent positives dans la seconde. Si donc on applique le théorème précédent à l'équation transformée, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0;$$

en remplaçant x par $-x$, on obtient la transformée

$$-x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x - 8 = 0,$$

qui présente deux variations. Cette dernière équation admet au plus deux racines positives, et par conséquent la proposée a au plus deux racines négatives. Si elle n'en a pas deux, elle n'en a pas du tout.

De même l'équation

$$x^7 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 6 = 0$$

ayant pour transformée l'équation

$$-x^7 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 6 = 0,$$

qui présente une seule variation, a une racine négative et une seule. Nous avons vu déjà que cette équation a au plus quatre racines positives; elle admet donc au plus cinq racines réelles; comme elle a sept racines, puisqu'elle est du septième degré, il s'ensuit qu'elle a au moins deux racines imaginaires.

L'équation

$$x^4 + 4x^3 - 5 = 0$$

ayant pour transformée

$$x^6 - 4x^3 - 5 = 0,$$

a une racine négative, et une seule. Nous avons vu déjà qu'elle a une racine positive; donc elle a en tout deux racines réelles, et, par conséquent, quatre racines imaginaires.

RECHERCHE DU PRODUIT DES FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ COMMUNS A DEUX FONCTIONS ENTIÈRES DE x .

146. Supposons que deux fonctions entières de x aient été décomposées en facteurs du premier degré, le produit des facteurs du premier degré communs à ces deux polynômes s'appelle leur *plus grand commun diviseur algébrique*.

Je désigne par X et X_1 ces deux polynômes, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x , en supposant que X soit d'un degré supérieur à X_1 . Je divise X par X_1 ; j'appelle Q le quotient et X_2 le reste, ce qui donne

$$X = X_1 Q + X_2.$$

Je dis que le plus grand commun diviseur entre X et X_1 est le même qu'en X_1 et X_2 . En effet, soit $x - a$ un facteur du premier degré commun à X et à X_1 ; si dans l'égalité précédente on fait $x = a$, X s'annule, de même X_1 et par suite le produit $X_1 Q$, puisque le polynôme Q conserve une valeur finie; donc X_2 , différence de deux quantités nulles, s'annule aussi; donc ce polynôme X_2 est divisible par $x - a$. Ainsi tout facteur du premier degré commun à X et X_1 est commun à X_1 et à X_2 . On démontrerait de même que, réci-

proquement, tout facteur du premier degré commun à X_1 et à X_2 est commun à X et X_1 . Les facteurs du premier degré communs étant les mêmes de part et d'autre, les produits, ou les plus grands communs diviseurs, sont les mêmes.

Ainsi la question est ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 . On procédera de la même manière : en divisant X_1 par X_2 , et appelant X_3 le reste, on aura

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3.$$

Le plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 est le même qu'entre X_2 et X_3 .

Divisons X_2 par X_3 et supposons que l'on trouve un reste nul; il est clair que X_3 , divisant exactement X_2 , est le produit des facteurs du premier degré communs à X_2 et à X_3 ; c'est donc le plus grand commun diviseur cherché.

Ainsi, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, après avoir ordonné ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de x , on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre, celui-ci par le reste de la division, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul. Le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.

Dans ces opérations, les restes et par suite les diviseurs successifs vont en diminuant de degré; on arrivera donc à un reste nul ou à un reste indépendant de x . Dans le premier cas, les deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique d'un certain degré. Dans le second cas, ils n'en admettent pas, et sont dits premiers entre eux.

147. REMARQUE. Dans la pratique, afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier tous les termes de

l'un quelconque des polynômes par une quantité quelconque indépendante de x . De même, si l'on aperçoit un facteur commun aux coefficients de tous les termes d'un certain reste, on peut le supprimer. Je suppose, par exemple, que pour effectuer la première division on ait multiplié le dividende par un nombre A , et qu'ensuite on ait divisé tous les termes du reste par le nombre B , on aura

$$AX = X_1Q + BX_2.$$

On reprendra sur cette égalité les raisonnements précédents : si la quantité a , mise à la place de x , annule X et X_1 , elle annulera aussi BX_2 ; et comme le facteur B est constant et différent de zéro, elle annulera nécessairement X_2 , etc. Ainsi rien n'est changé dans la recherche du plus grand commun diviseur.

RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS DONT
LES PREMIERS MEMBRES SONT DES FONCTIONS ENTIÈRES DE
L'INCONNUE.

148. Si les deux équations

$$X = 0, \quad X_1 = 0$$

ont n racines communes, les deux polynômes X et X_1 admettent n facteurs du premier degré communs, et, par conséquent, ils ont un plus grand commun diviseur du degré n . Pour trouver les racines communes à deux équations, on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux premiers membres de ces équations; soit D ce plus grand commun diviseur, l'équation

$$D = 0$$

donnera les racines communes aux deux équations.

Si les deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur algébrique, les deux équations n'ont pas de racine commune. Si le plus grand commun diviseur est du premier degré, il y a une racine commune ; s'il est du second degré, il y a deux racines communes, etc.

Exemples.

1° Trouver les racines communes aux deux équations

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 &= 0, \\ 2x^3 - 5x^2 + x + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Voici le détail des opérations :

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$	$x-1$	$2x+1$
$2x^3 - 5x^2 + x + 2$	$2x^3 - 5x^2 + x + 2$	$x^2 - 3x + 2$
$2x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 6x + 4$	$-2x^3 + 6x^2 - 4x$	
$-2x^3 + 5x^3 - x^3 - 2x$		$x^2 - 3x + 2$
$-x^3 + 5x^2 - 8x + 4$		0
$-2x^3 + 10x^2 - 16x + 8$		
$+2x^3 - 5x^2 + x + 2$		
		$5x^2 - 15x + 10$
		$x^2 - 3x + 2$

On a multiplié deux fois le premier dividende par 2 afin d'éviter les fractions, et on a simplifié le reste en le divisant par 5. Le plus grand commun diviseur des deux polynômes est $x^2 - 3x + 2$. Il y a donc deux racines communes qui seront données par l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

ces deux racines communes sont 1 et 2.

2° Résoudre l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0,$$

sachant que l'une des racines surpasse une autre racine de 2. Posons $x = x' + 2$, et remplaçons x par cette valeur dans l'équation proposée, nous formerons la nouvelle équation

$$(x' + 2)^4 - 4(x' + 2)^3 + 4(x' + 2)^2 - 4(x' + 2) + 3 = 0,$$

ou, en développant et supprimant l'accent,

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x - 5 = 0.$$

De la relation $x = x' + 2$, on déduit $x' = x - 2$; les valeurs de x' , ou les racines de la nouvelle équation, sont inférieures de deux unités aux valeurs de x , c'est-à-dire aux racines de l'équation proposée; celle-ci ayant deux racines telles que a et $a + 2$, la première admettra les racines $a - 2$ et a ; il en résulte que les deux équations ont une racine commune a , et, par suite, les deux polynômes un plus grand commun diviseur du premier degré. En cherchant ce plus grand commun diviseur on trouve $x - 1$. Ainsi l'équation proposée admet la racine 1 et, par conséquent, la racine $1 + 2$ ou 3; connaissant deux racines, la division par $x - 1$ et par $x - 3$ ramènera l'équation à une équation du second degré $x^2 + 1 = 0$, qui donnera les deux autres racines.

COMMENT ON RECONNAÎT QU'UNE ÉQUATION A DES RACINES ÉGALES, ET COMMENT ALORS ON RAMÈNE SA RÉVOLUTION A CELLE D'AUTRES ÉQUATIONS DE DEGRÉ MOINDRE, DONT LES RACINES SONT INÉGALES.

149. Nous avons expliqué (n° 134) comment on décompose un polynôme entier $f(x)$ du degré m en un produit de m facteurs du premier degré

$$f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k).$$

Cette décomposition ne suppose pas que les quantités $a, b, c, \dots, k$ soient différentes les unes des autres. Si parmi ces quantités plusieurs sont égales entre elles, on dit que l'équation a des racines égales.

Supposons $b = a$; le polynôme contient le facteur $(x-a)^2$, et la racine a est dite racine *double*. De même, si $a = b = c$, le polynôme contient le facteur $(x-a)^3$ et la racine a est racine *triple*. En général, lorsque le polynôme contient le facteur $(x-a)^n$, on dit que l'équation a n racines égales à a , ou que la racine a est du degré n de multiplicité. De cette manière les théorèmes généraux sur les équations subsistent : ainsi, en tenant compte du degré de multiplicité des racines, une équation du degré m a toujours m racines, etc.

150. THÉORÈME. Une racine d'ordre n annule le polynôme et ses $n-1$ premières dérivées, et réciproquement.

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Nous pouvons écrire $f(x) = f(a + x - a)$, et, regardant $x - a$ comme un accroissement, développer suivant la loi connue; nous aurons

$$(1) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots$$

Le premier terme $f(a)$ étant nul, puisque a est racine, on peut diviser par $x - a$, ce qui donne

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a) + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)^2 + \dots$$

Si a est racine double, le quotient, devant contenir encore une fois le facteur $x - a$, s'annulera pour $x = a$; mais pour $x = a$, il se réduit à $f'(a)$; on a donc $f'(a) = 0$, et la racine double vérifie l'équation $f'(x) = 0$. En divisant par $x - a$, on obtient le nouveau quotient

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{1.2} + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a) + \dots$$

Si a est racine triple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f'''(a)=0$. Ainsi une racine triple annule le polynôme $f(x)$ et ses deux premières dérivées. En effectuant la division, on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \frac{f^{(4)}(a)}{1.2.3.4}(x-a) + \dots$$

Si a est racine quadruple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f^{(4)}(a)=0$. Ainsi une racine quadruple annule le polynôme et ses trois premières dérivées. En continuant ainsi de proche en proche, on voit qu'une racine du degré n de multiplicité annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées.

La réciproque est vraie : si a annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées, elle est racine du degré n de multiplicité de l'équation $f(x)=0$. Car le développement (1) se réduit alors à

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\dots(n+1)}(x-a)^{n+1} + \dots,$$

ou, en mettant $(x-a)^n$ en facteur, à

$$f(x) = (x-a)^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\dots(n+1)}(x-a) + \dots \right].$$

Le polynôme $f(x)$ contenant le facteur $(x-a)^n$, a est racine d'ordre n .

Il résulte de ces deux propositions qu'une racine d'ordre n

annule le polynôme et ses $n-1$ premières dérivées, mais n'annule pas la dérivée suivante.

151. COROLLAIRE I. Les racines simples de l'équation $f(x)=0$ ne vérifient pas l'équation $f'(x)=0$.

Les racines doubles de l'équation $f(x)=0$ sont racines simples de l'équation $f'(x)=0$; car elles annulent le polynôme $f'(x)$, et n'annulent pas sa dérivée $f''(x)$.

Les racines triples de l'équation $f(x)=0$ sont racines doubles de l'équation $f'(x)=0$; car elles annulent le polynôme $f'(x)$ et sa première dérivée $f''(x)$, et n'annulent pas la dérivée suivante.

En général, une racine d'ordre n de l'équation $f(x)=0$ est racine d'ordre $n-1$ de l'équation $f'(x)=0$.

152. COROLLAIRE II. Il résulte de là que *le plus grand commun diviseur entre un polynôme et sa dérivée est le produit des facteurs multiples qui composent le polynôme proposé, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité*. En effet, les racines simples de l'équation $f(x)=0$ ne vérifiant pas l'équation $f'(x)=0$, les facteurs simples du polynôme $f(x)$ n'entrent pas dans la dérivée $f'(x)$; les racines doubles de l'équation $f(x)=0$ étant racines simples de l'équation $f'(x)=0$, les facteurs carrés entrent au premier degré dans la dérivée. En général, soit $(x-a)^n$ un facteur multiple du polynôme proposé $f(x)$, la racine a d'ordre n étant racine d'ordre $n-1$ de l'équation $f'(x)=0$, le polynôme $f'(x)$ contiendra le facteur $(x-a)^{n-1}$.

Ainsi, pour voir si une équation $f(x)=0$ a des racines égales, on cherchera le plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. Si ces deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur, on en conclut que l'équation proposée n'a pas de racines

égales. Si ces deux polynômes ont un plus grand commun diviseur du premier degré, l'équation proposée a deux racines égales. Si le plus grand commun diviseur est du second degré, l'équation admet deux racines doubles ou une racine triple, etc.

Comme application, nous allons chercher la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0,$$

pour que cette équation ait deux racines égales. Le polynôme $x^3 + px + q$ et sa dérivée $3x^2 + p$ doivent admettre un commun diviseur du premier degré; si l'on effectue l'opération du plus grand commun diviseur, quand on sera arrivé à un diviseur du premier degré, on devra trouver un reste nul.

$x^3 + px + q$	x	$3x - 9q$
$3x^3 + 3px + 3q$	$3x^3 + p$	$2px + 3q$
$- 3x^3 - px$	$6px^2 + 2p^2$	$- 6px^2 - 9qx$
$2px + 3q$	$- 9qx + 2p^2$	$- 18pqx + 4p^3$
	$4p^3 + 27q^2$	

Ainsi la condition demandée est $4p^3 + 27q^2 = 0$, ou

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

L'équation $2px + 3q = 0$, obtenue en égalant le plus grand commun diviseur à zéro, donne la racine double

$x = -\frac{5q}{2p}$. La somme des racines étant nulle, la troisième racine est $\frac{5q}{p}$.

Par exemple, les coefficients de l'équation

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

vérifiant la condition précédente, cette équation a deux racines égales à $+3$; la troisième racine est -6 .

153. Nous allons expliquer maintenant comment on ramène la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle d'autres équations de degré moindre dont les racines sont inégales. Soit $X=0$ une équation qui admet des racines de différents ordres, par exemple, des racines simples, doubles, triples et quadruples. Si l'on désigne par X_1 le produit des facteurs simples, par X_2 le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines doubles, chacun étant pris seulement au premier degré, et de même par X_3 et X_4 , les produits des facteurs binômes qui correspondent aux racines triples ou quadruples, on écrira le polynôme X sous la forme

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

Je cherche le plus grand commun diviseur D entre le polynôme X et sa dérivée; ce plus grand commun diviseur étant égal au produit des facteurs multiples dont on diminue les exposants d'une unité, j'aurai

$$D = X_1 X_2 X_3^2 X_4^3.$$

De même, le plus grand commun diviseur entre le polynôme D et sa dérivée sera

$$D_1 = X_1 X_2,$$

et enfin le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée

$$D_2 = X_1.$$

En divisant deux à deux les polynômes précédents, on obtient les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3 X_4,$$

$$D_2 = X_1.$$

Divisant chacun de ces nouveaux polynômes par le suivant, on a enfin

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1,$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_2,$$

$$\frac{Q_2}{D_2} = X_3,$$

$$D_2 = X_4.$$

Une fois trouvés ces polynômes X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , la résolution de l'équation proposée est ramenée à celle des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui n'ont plus de racines égales; la première donne les racines simples de l'équation proposée, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, etc.

Ainsi, pour ramener la résolution d'une équation qui a

des racines égales à celle d'autres équations de degré moindre ayant leurs racines inégales, on cherche le plus grand commun diviseur entre le premier membre de l'équation et sa dérivée, le plus grand commun diviseur entre ce premier plus grand commun diviseur et sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée; on divise ensuite le polynôme proposé par le premier plus grand commun diviseur, le premier par le second, et ainsi de suite; on divise, enfin, chacun de ces quotients par le suivant, et l'on égale à zéro ces nouveaux quotients. On obtient de la sorte des équations donnant, la première les racines simples, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, ..., de l'équation proposée.

Exemple :

Soit l'équation du septième degré

$$X = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

En cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée, on trouve

$$D = x^3 - x^2 - x + 1;$$

en cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme D et sa dérivée, on trouve

$$D_1 = x - 1;$$

ce dernier polynôme est premier avec sa dérivée. Divisant ces polynômes l'un par l'autre, on a les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = x^4 + x^3 - x - 1,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - 1,$$

$$D_1 = x - 1.$$

De nouvelles divisions donnent

$$\begin{aligned}\frac{Q}{Q_1} &= x^2 + x + 1, \\ \frac{Q_1}{D_1} &= x + 1, \\ D_1 &= x - 1;\end{aligned}$$

et l'on arrive aux trois équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0.$$

La première donne deux racines simples imaginaires, la seconde une racine double -1 , la troisième une racine triple $+1$.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE A COEFFICIENTS COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

154. Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \dots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

l'équation proposée, dont nous supposons tous les coefficients commensurables et même entiers; car s'ils n'étaient pas entiers, on les rendrait tels en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Nous avons expliqué (n° 133) comment on effectue la division par $x - a$ du polynôme $f(x)$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x ; le premier coefficient du quotient étant égal au premier coefficient du dividende, chacun des coefficients du quotient se forme en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient correspondant du dividende. Si

tous les coefficients du dividende sont entiers, si, de plus, a est un nombre entier positif ou négatif, il est clair que le quotient ainsi formé aura aussi tous ses coefficients entiers, puisqu'on les obtient en combinant des nombres entiers par multiplication et par addition.

Imaginons maintenant qu'ayant ordonné le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x ,

$$f(x) = A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \dots + A_1x^{m-1} + A_0x^m,$$

on le divise par $a - x$; le diviseur étant seulement changé de signe, le quotient changera simplement de signe, et par conséquent aura toujours ses coefficients entiers. Effectuons cette division

$$\begin{array}{r|l}
 A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 + \dots + A_0x^m & a - x \\
 (C_{m-1} + A_{m-1})x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 + \dots + A_0x^m & \hline
 (C_{m-1} + A_{m-1})x^2 + A_{m-2}x^3 + \dots + A_0x^m & \\
 (C_{m-2} + A_{m-2})x^3 + \dots + A_0x^m & \\
 \dots & \\
 (C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0x^m &
 \end{array}$$

Le premier coefficient est $\frac{A_m}{a}$; ce nombre doit être entier;

ainsi, une première condition à laquelle doit satisfaire une racine entière, c'est de diviser exactement le dernier terme A_m de l'équation. Pour abréger, représentons par C_{m-1} le premier terme du quotient; multiplions le par le diviseur $a - x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruira le premier terme A_m du dividende, le produit par $-x$ s'ajoutera au second terme; de sorte que le second dividende aura pour premier terme $(C_{m-1} + A_{m-1})x$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende

proposé. Si l'on divise ce premier terme par a , on aura le second terme $\frac{C_{m-1} + A_{m-1}}{a} x$ du quotient : ce second coefficient doit être entier ; appelons le C_{m-2} . Multiplions le second terme $C_{m-2} x$ du quotient par $a - x$ et retranchons du dividende ; le produit par a détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-x$ s'ajoute au second terme ; de sorte que le troisième dividende aura pour premier terme $(C_{m-2} + A_{m-2}) x^2$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a , on aura le troisième terme $\frac{C_{m-2} + A_{m-2}}{a} x^2$ du quotient ; ce troisième coefficient, que nous représenterons par C_{m-3} , doit être entier, etc.

La loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en ajoutant au précédent le coefficient du terme qui occupe dans le dividende le même rang que le terme que l'on veut former et divisant la somme par a .

On arrivera ainsi au dernier dividende $(C_1 + A_1) x^{m-1} + A_0 x^m$ qui donnera le dernier terme $\frac{C_1 + A_1}{a} x^{m-1}$ du quotient ; mais on trouve directement ce dernier terme sous la forme $-A_0 x^{m-1}$, en divisant le dernier terme $A_0 x^m$ du dividende par $-x$; on doit donc avoir $\frac{C_1 + A_1}{a} = -A_0$. Si cette dernière condition est remplie, le reste de la division est nul et par conséquent a est racine ; car, si l'on multiplie par $a - x$ le dernier terme $-A_0 x^{m-1}$ du quotient, le produit par a détruit le premier terme du dernier dividende, et le produit par $-x$ détruit le second.

153. Il résulte de ce qui précède que si l'on veut trouver les racines entières d'une équation à coefficients entiers

ordonnée suivant les puissances décroissantes de x , on n'essayera que les diviseurs du dernier terme, et l'on procédera de la manière suivante :

RÈGLE. *Pour voir si un nombre entier a est racine de l'équation, on divisera le dernier terme par ce nombre; on ajoutera au quotient le coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera la somme par a ; on ajoutera au quotient le coefficient du terme précédent, et l'on divisera la somme par a , et ainsi de suite. Toutes ces divisions doivent se faire exactement, et quand on aura ajouté le coefficient du second terme de l'équation et divisé la somme par a , on devra trouver pour dernier quotient le premier coefficient de l'équation changé de signe.*

Lorsqu'un nombre entier a satisfait à toutes ces conditions, il est évidemment racine de l'équation; c'est ce qu'indique spécialement la dernière condition, qui exprime que le reste de la division du premier membre de l'équation par $a - x$ ou par $x - a$ est nul. On abaissera alors le degré de l'équation proposée en divisant son premier membre par $x - a$; mais il est à remarquer que le quotient est tout calculé; les coefficients de ce quotient sont précisément les quotients entiers obtenus dans les opérations précédentes changés de signe. On continuera les essais, non plus sur l'équation proposée, mais sur l'équation simplifiée.

Exemples.

1.° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^3 + x + 6 = 0.$$

On commencera par essayer 1; pour que 1 soit racine, il faut que la somme des coefficients positifs égale celle des coefficients négatifs: c'est ce qui a lieu ici: donc 1 est ra-

cine. On divisera le premier membre de l'équation par $x - 1$, d'après la règle du n° 133, et l'on aura à considérer l'équation

$$x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Cette équation n'admet plus la racine 1 ; on essayera -1 : si l'on remplace x par -1 , on a un résultat nul

$$-1 + 6 - 6 + 7 - 6 = 0;$$

donc -1 est racine. On divisera l'équation par $x + 1$, d'après la même règle, et l'on aura l'équation

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

Après s'être assuré que cette équation n'admet pour racine ni $+1$ ni -1 , on essayera les diviseurs du dernier terme 6, pris avec le signe $+$ ou le signe $-$. Essayons d'abord le diviseur le plus simple $+2$, et pour cela procédons d'après la règle formulée plus haut ; parcourant le polynôme de droite à gauche, nous dirons : le dernier terme -6 divisé par 2 donne -3 ; ajoutant le coefficient suivant -1 , on a -4 qui, divisé par 2, donne -2 ; ajoutant le coefficient suivant -5 , on a -7 , qui n'est pas divisible par 2 : ainsi 2 n'est pas racine.

Essayons maintenant -2 , et écrivons les quotients successifs de droite à gauche,

$$-1, +3, -1, +3.$$

Le dernier terme -6 divisé par -2 donne $+3$; ajoutant -1 , on a $+2$ qui, divisé par -2 , donne -1 ; ajoutant -5 , on a -6 qui, divisé par -2 , donne $+3$; ajoutant -1 , on a $+2$ qui, divisé par -2 , donne -1 . On est arrivé au second coefficient, et on a trouvé un dernier quotient

— 1 égal et de signe contraire au premier coefficient + 1. Donc — 2 est racine. Les nombres écrits plus haut, changés de signe, sont les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation par $x + 2$; on écrira donc immédiatement l'équation

$$x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0.$$

Le nombre — 2 ne peut être une seconde fois racine, puisqu'il ne divise plus le dernier terme. Les seuls nombres à essayer sont maintenant les diviseurs de 5, savoir + 3 et — 3. Si l'on essaye + 3, on a les quotients

$$-1, 0, -1;$$

Donc + 3 est racine, et, en divisant par $x - 3$, on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 + 1 = 0,$$

qui a deux racines imaginaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

L'équation proposée est complètement résolue : ses sept racines sont + 1, — 1, — 2, + 3, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

2° Déterminer les racines entières de l'équation

$$2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0.$$

Après avoir reconnu que + 1 et — 1 ne sont pas racines, on essayera les diviseurs de 15. Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0 & \\ \hline & -5 \\ +6 & -6 +5 \\ -2 & +2 -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} +3 \\ -3 \\ +5 \end{array}$$

Les nombres + 5 et — 3 ne sont pas racines, mais — 5

l'est. Divisant par $x-5$, on aura à résoudre l'équation du second degré

$$2x^2 - 2x + 3 = 0.$$

3° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0.$$

Après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont pas racines, on essaiera les diviseurs de 576, en commençant par les plus faibles.

$x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0$		
+ 24 + 52 + 205 + 396 + 288		+ 2
+ 27 + 47 - 108 - 288		- 2
+ 82 + 232 + 192		+ 3
+ 30 - 104 - 192		- 3
+ 44 + 162 + 146		+ 4
+ 19 - 90 - 144		- 4
+ 19 + 100 + 96		+ 6
+ 9 - 68 - 96		- 6
+ 72 + 72		+ 8
- 1 + 12 + 5 - 54 - 72		- 8
$x^4 - 12x^3 + 5x^2 - 54x - 72 = 0$		
+ 9		- 8
- 8		+ 9
+ 8		- 9
- 1 0 - 5 - 6		+ 12
$x^3 + 5x + 6 = 0.$		

Cette dernière équation n'a plus de racines entières. Ainsi l'équation proposée admet deux racines entières -8 et $+12$.

Recherche des racines commensurables fractionnaires.

156. Nous supposons toujours que l'équation

$$(1) \quad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers. Une racine commensurable quelconque pourra être mise sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, et l'on aura

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + \dots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0.$$

Si l'on multiplie par b^{m-1} , cette relation devient

$$\frac{A_0 a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 b a^{m-2} + \dots + A_m b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier doit l'être aussi; mais b est premier avec a et par suite avec a^m , donc b divise A_0 ; ainsi toute racine commensurable a pour dénominateur un diviseur du premier coefficient de l'équation.

En multipliant par b^m et divisant par a , on a de même

$$\frac{A_m b^m}{a} = -(A_0 a^{m-1} + A_1 b a^{m-2} + \dots + A_{m-1} b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier l'est aussi; or a est premier avec b^m , donc a divise A_m ; ainsi le numérateur est un diviseur du dernier coefficient de l'équation.

157. PREMIÈRE MÉTHODE. Il résulte de là qu'une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient est l'unité, n'a pas de racine commensurable fractionnaire. En effet, le

dénominateur d'une racine commensurable, devant diviser le premier coefficient qui est ici l'unité, est lui-même égal à un, et par conséquent la racine est entière. Ainsi, dans ce cas, toutes les racines commensurables sont entières.

Ceci nous donne un moyen facile de ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines entières.

Dans l'équation proposée, remplaçons x par $\frac{x'}{k}$, nous obtenons la nouvelle équation

$$\frac{A_0 x'^m}{k^m} + \frac{A_1 x'^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{A_2 x'^{m-2}}{k^{m-2}} \dots + A_m = 0.$$

Déterminons maintenant le nombre entier k de manière qu'en chassant les dénominateurs pour rendre les coefficients entiers, on réduise en même temps le premier coefficient à l'unité. Cette opération réussira toujours quand on prendra $k = A_0$; en effet, si l'on multiplie par k^{m-1} , on met l'équation sous la forme

$$\frac{A_0}{k} x'^m + A_1 x'^{m-1} + A_2 k x'^{m-2} \dots + A_m k^{m-1} = 0;$$

si $k = A_0$, cette équation devient, l'accent étant supprimé,

$$(2) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 A_0 x^{m-2} \dots + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Cette dernière équation ayant ses coefficients entiers et son premier coefficient égal à l'unité, toutes ses racines commensurables sont entières. Nous avons posé $x = \frac{x'}{k}$, c'est-à-dire que les racines de l'équation (1) sont égales à celles de l'équation (2) divisées par k ; ainsi, quand on aura trouvé les racines entières de l'équation transformée (2), en les

divisant par k , on obtiendra toutes les racines commensurables de l'équation proposée.

Lorsqu'il s'agit de trouver les racines commensurables d'une équation, on commence par chercher les racines entières, et, s'il y en a, on divise l'équation par les facteurs binômes correspondants. On détermine ensuite les racines fractionnaires à l'aide des racines entières de l'équation (2); mais dans la recherche des racines entières de cette dernière équation, il est inutile de pousser les essais jusqu'au dernier terme; car la plus grande racine de l'équation proposée étant au plus égale à A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0 , la plus grande racine entière de l'équation (2) sera au plus égale à k fois celle-ci; on s'arrêtera à cette limite.

Exemples.

1° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0.$$

On trouve d'abord la racine entière -2 ; divisant par $x + 2$, l'équation se réduit à

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Cette équation n'ayant plus de racine entière, on la transforme en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, ce qui donne

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0$$

Les racines fractionnaires de la seconde équation ne pouvant être que $\pm \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{3}{2}$, on cherchera les racines entières de la troisième équation seulement parmi les nombres ± 1 .

et ± 3 ; on trouve que $+3$ est racine; ainsi l'équation proposée admet la racine fractionnaire $\frac{3}{2}$. La dernière équation divisée par $x-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2 - 8 = 0$$

qui a deux racines incommensurables $\pm 2\sqrt{2}$, d'où résulte pour l'équation proposée les racines incommensurables $\pm\sqrt{2}$. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $-2, \frac{3}{2}, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

2° L'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0$$

n'a pas de racine entière. Si l'on remplace x par $\frac{x}{k}$, et si l'on multiplie par k^4 , elle devient

$$\frac{4x^4}{k^4} - \frac{28x^3}{k} + 45x^2 - 6kx - 18k^2 = 0;$$

pour opérer la transformation, il suffit de prendre $k=2$, ce qui donne

$$x^4 - 14x^3 + 45x^2 - 12x - 72 = 0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation proposée, devenant entières quand on les multiplie par 2, ne peuvent être que $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$; on essayera donc $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

L'équation transformée admet la racine -1 ; la division par $x+1$ donne l'équation

$$x^3 - 15x^2 + 60x - 72 = 0.$$

Cette dernière admet la racine 5; la division par $x - 5$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2 - 12x + 24 = 0,$$

dont les racines $x = 6 \pm \sqrt{12}$ sont incommensurables. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 5 \pm \sqrt{3}$.

158. DEUXIÈME MÉTHODE. Il est à remarquer que lorsqu'une équation

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

a ses coefficients entiers et que l'on divise le premier membre par le facteur binôme $x - \frac{a}{b}$ qui correspond à une racine commensurable fractionnaire $\frac{a}{b}$, le quotient a aussi ses coefficients entiers. Supposons que l'on effectue la division en ordonnant, par rapport aux puissances décroissantes de x , comme nous l'avons expliqué au n° 133. La relation

$$A_0 \frac{a^n}{b^n} + A_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + A_2 \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \dots + A_n = 0,$$

mise sous la forme

$$\frac{A_0 a^n}{b} = -(A_1 a^{n-1} + A_2 b a^{n-2} + \dots + A_n b^{n-1}),$$

montre que b divise A_0 ; donc le second coefficient du quotient

$$B_1 = A_0 \frac{a}{b} + A_1$$

est entier. Si l'on fait passer le terme $A_1 a^{m-1}$ dans le premier membre, et si l'on divise par b , la relation précédente s'écrit

$$\frac{\left(A_0 \frac{a}{b} + A_1\right)}{b} a^{m-1} = \frac{B_1 a^{m-1}}{b} = -(A_2 a^{m-2} + A_3 b a^{m-3} \dots + A_m b^{m-2});$$

on voit par là que b divise B_1 , et par conséquent que le troisième coefficient du quotient

$$B_1 = B_1 \frac{a}{b} + A_1$$

est entier.

Faisons passer le terme $A_1 a^{m-1}$ dans le premier membre et divisons par b , nous aurons de même

$$\frac{\left(B_1 \frac{a}{b} + A_2\right) a^{m-2}}{b} = \frac{B_2 a^{m-2}}{b} = -(A_3 a^{m-3} \dots + A_m b^{m-3}).$$

Il en résulte que B_2 est divisible par b , et par conséquent que le quatrième coefficient est entier, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme du quotient. Remarquons que non-seulement les coefficients du quotient sont entiers, mais encore qu'ils sont tous divisibles par b .

Si, au lieu d'ordonner le polynôme par rapport aux puissances décroissantes de x , on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes, et qu'on divise par $\frac{a}{b} - x$, on obtiendra le même quotient changé de signe, et par conséquent on devra encore avoir des coefficients entiers.

Ces deux manières d'effectuer la division peuvent être appliquées pour l'essai direct des racines commensurables fractionnaires. On choisira l'une ou l'autre, suivant les cas.

Exemples:

1°. Reprenons l'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

dont il a déjà été question. Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, cherchons les racines fractionnaires. Essayons d'abord $\frac{1}{2}$; si nous calculons le quotient de droite à gauche, comme pour les racines entières, il faudrait diviser successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à multiplier par 2; toutes les opérations seraient possibles, et il faudrait aller jusqu'au bout pour voir si $\frac{1}{2}$ est racine. Au contraire, en calculant de gauche à droite, il faut multiplier successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à diviser par 2; nous emploierons donc de préférence ce second procédé : 4 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 2, et $-28 \dots -26$; -26 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne -13 et $+45 \dots +32$; $+32$ multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $+16$ et $-6 \dots +10$; $+10$ multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $+5$ et $-18 \dots -13$. Il arrive ici que l'opération se prolonge jusqu'à la fin; mais le reste -13 n'est pas nul; donc $\frac{1}{2}$ n'est pas racine.

Essayant $-\frac{1}{2}$ de la même manière, toutes les opérations sont possibles, et l'on arrive à un reste nul; donc $-\frac{1}{2}$ est

racine, et l'on a le quotient

$$\begin{aligned} 4x^3 - 30x^2 + 60x - 36 &= 0, \\ \text{ou} \quad 2x^3 - 15x^2 + 30x - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Après avoir essayé encore une fois $-\frac{1}{2}$, on essayera $\frac{3}{2}$, mais en allant de droite à gauche : -18 divisé par $\frac{3}{2}$, donne -12 ; ajoutant $+30$ on a $+18$ qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne $+12$; ajoutant -15 on a -3 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne -2 ; tous les quotients sont entiers et le dernier égale le premier coefficient changé de signe. Donc $\frac{3}{2}$ est racine, et le quotient de la division par $x - \frac{3}{2}$ est

$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x + 12 &= 0, \\ \text{ou} \quad x^2 - 6x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Cette équation du second degré donne deux racines incommensurables.

2° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, on essayera la fraction $\frac{1}{5}$ en allant de gauche à droite, et l'on verra que cette fraction est racine. Dans l'équation simplifiée, on essayera les fractions $\pm \frac{1}{5}$, $\pm \frac{2}{5}$,

et l'on verra que $-\frac{2}{5}$ est racine. L'équation à laquelle on arrive, ayant son premier coefficient égal à l'unité, n'a plus de racine commensurable. Voici le tableau des calculs :

$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$	
$\quad \quad \quad - 1 + 3$	2
$\quad + 21 + 4 - 3$	-2
$\quad \quad \quad - 1 + 2$	3
$\quad \quad \quad \quad - 2$	-3
$\quad \quad \quad \quad \quad + 1$	6
$\quad \quad \quad + 1 - 1$	-6
15, +21, -39, -18, 0	$\frac{1}{3}$
$5x^3 + 7x^2 - 13x - 6 = 0$	
5, +8	$\frac{1}{5}$
5, +6	$-\frac{1}{5}$
5, +9	$\frac{2}{5}$
5, +5, -15, 0,	$-\frac{2}{5}$
$x^2 + x - 3 = 0.$	

Condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré.

139. LEMME. Deux racines réelles consécutives de l'équation $f(x) = 0$ comprennent au moins une racine réelle de l'équation $f'(x) = 0$.

En effet, soient a et b deux racines consécutives de l'équation $f(x) = 0$; imaginons que l'on fasse varier x de a

à b ; pour $x = a$, la fonction $f(x)$ est nulle, elle s'annule de nouveau pour $x = b$; dans l'intervalle, elle conserve des valeurs finies et de même signe. La valeur absolue de la fonction commence donc par croître pour décroître ensuite; elle passe nécessairement par un maximum, et, par conséquent, la dérivée $f'(x)$ s'annule dans l'intervalle de a à b . Elle peut s'annuler plusieurs fois, parce que, dans l'intervalle de a à b , $f(x)$ peut éprouver plusieurs alternatives d'augmentation et de diminution.

La réciproque n'est pas vraie : deux racines consécutives de l'équation $f'(x) = 0$ n'en comprennent pas toujours une de l'équation $f(x) = 0$.

160. THÉORÈME. *Lorsque l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f'(x) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, et deux racines consécutives de la seconde équation en comprennent une et une seule de la première.*

Soit m le degré de l'équation $f(x) = 0$, dont nous supposons les m racines réelles et rangées par ordre de grandeur croissante

$$a, b, c, \dots, h, k.$$

En vertu du lemme précédent, chacun des intervalles comprend une racine de la dérivée; il y a $m - 1$ intervalles; donc l'équation $f'(x) = 0$ a ses $m - 1$ racines réelles. Il est évident qu'il n'y a qu'une racine dans chacun des intervalles, sans quoi cette équation aurait plus de $m - 1$ racines. Appelons

$$a', b', c', \dots, h'$$

les $m - 1$ racines réelles de l'équation $f'(x) = 0$, rangées aussi par ordre de grandeur; la première a' sera comprise entre a et b , la seconde b' entre b et c , etc. Réciproquement,

deux racines consécutives quelconques de la seconde équation en comprennent une de la première et une seule; a' et b' comprennent la racine b , b' et c' la racine c , etc.; il y a donc $m - 2$ racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ dans les $m - 2$ intervalles, et de plus il y en a une a , moindre que a' , et une autre k , plus grande que h' .

161. Considérons, en particulier, l'équation du troisième degré

$$f(x) = x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0.$$

L'équation du second degré

$$f'(x) = 3x^2 + 2A_1x + A_2 = 0$$

doit avoir ses deux racines réelles, ce qui donne une première condition $A_1^2 - 3A_2 > 0$. Appelons a' et b' ces deux racines, a , b , c étant les trois racines de l'équation proposée. Supposons que x varie de $-\infty$ à $+\infty$; pour $x = -\infty$, le polynôme $f(x)$ a le signe $-$, qu'il conserve jusqu'à ce que x arrive à la plus petite racine a ; quand x dépasse a , le polynôme change de signe, et prend le signe $+$ qu'il conserve jusqu'à la seconde racine b ; là il change de signe une seconde fois et prend le signe $-$ qu'il conserve jusqu'à la plus grande racine c ; il change alors de signe une troisième fois, et prend le signe $+$ qu'il garde indéfiniment. Ainsi, $f(x)$ a le signe $-$ de $-\infty$ à a , le signe $+$ de a à b , le signe $-$ de b à c , et le signe $+$ de c à $+\infty$.

Mais on a vu que la première racine a' de l'équation $f'(x) = 0$ est comprise entre a et b ; si donc on remplace x par a' dans le polynôme $f(x)$, on doit trouver un résultat positif. La seconde racine b' étant comprise entre b et c , donnera un résultat négatif.

Ces conditions sont suffisantes; car, si l'on a $f(a') > 0$

et $f(b') < 0$, le polynôme $f(x)$ change de signe, une première fois quand x croît de $-\infty$ à a' , une seconde fois de a' à b' , et une troisième fois de b' à $+\infty$; donc l'équation $f(x)=0$ a ses trois racines réelles.

162. L'équation du troisième degré

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

peut toujours être ramenée à la forme simple

$$x^3 + px + q = 0.$$

Il suffit pour cela de remplacer x par $x - \frac{A_1}{3A_0}$, ce qui fait disparaître le terme du second degré; on augmente ainsi toutes les racines de la même quantité $\frac{A_1}{3A_0}$.

L'équation

$$3x^3 + p = 0$$

devant avoir ses deux racines réelles, il faut que le coefficient p soit négatif; supposons cette condition remplie; nous aurons

$$a' = -\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}, \quad b' = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}.$$

On doit avoir en outre $f(a') > 0$, c'est-à-dire

$$-\left(\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

ou

$$(1) \quad -\frac{p}{3}\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2}.$$

La condition $f(b') < 0$ se déduira de la précédente en

changeant le signe du radical et le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$\frac{p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} < -\frac{q}{2},$$

ou

$$(2) \quad -\frac{p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}.$$

Le coefficient p étant négatif, les premiers membres de ces inégalités sont des quantités positives. Supposons $q > 0$; l'inégalité (1), ayant son second membre négatif, sera toujours satisfaite; l'inégalité (2) ayant ses deux membres positifs, on peut les élever au carré, et l'on en déduit

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^3,$$

ou

$$(3) \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3 < 0.$$

Supposons maintenant $q < 0$; c'est l'inégalité (2) qui est toujours vérifiée, et l'inégalité (1) conduit à la même inégalité (3). D'ailleurs, l'inégalité (3) ne peut être satisfaite que si le coefficient p est négatif.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles, est que ses coefficients satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3 < 0.$$

Quand le premier membre de cette inégalité est une quantité positive, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Quand cette quantité est nulle, l'équation a deux racines égales, comme nous l'avons vu au n° 152.

Exemples.

1° L'équation

$$x^3 + 5x - 2 = 0,$$

dans laquelle le coefficient du second terme est positif, n'a qu'une racine réelle ; cette racine est positive.

2° L'équation

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

a ses trois racines réelles. La transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, une seule est négative, et les deux autres sont positives.

3° L'équation

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. Cette racine est négative.

Exercices.

1° Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432 = 0,$$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 + 6x^2 + 7x^2 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0,$$

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0.$$

2° Chercher les racines commensurables des équations

$$x^3 + 5x^2 + x^2 - 16x^2 - 20x - 16 = 0,$$

$$2x^3 - 53x + 105 = 0,$$

$$6x^6 - 19x^4 + 13x^3 - 20x^2 + 48x^2 - 16 = 0,$$

$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

CHAPITRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

DIFFÉRENCES DES DIVERS ORDRES.

163. Étant données une suite de $m + 1$ quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m,$$

si l'on retranche chacune d'elles de celle qui la suit, on a les *différences premières* de ces quantités. On est convenu de désigner ces différences par la lettre Δ . Ainsi l'on représente par Δu_0 la différence $u_1 - u_0$, par Δu_1 la différence $u_2 - u_1$, etc.

Les différences premières forment une suite de m quantités

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_{m-1};$$

si l'on retranche de même chacune d'elles de celle qui la suit, on a les différences des différences premières, ou les *différences secondes* des quantités proposées. On les désigne par le symbole $\Delta\Delta$ ou plus simplement Δ^2 . Ainsi l'on représente par $\Delta^2 u_0$ la différence $\Delta u_1 - \Delta u_0$, par $\Delta^2 u_1$ la différence $\Delta u_2 - \Delta u_1$, etc.

Les différences secondes forment une suite de $m-1$ quantités

$$\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \dots, \Delta^2 u_{m-1},$$

dont on peut prendre les différences premières, ce qui donnera les différences troisièmes des quantités proposées; on désignera ces différences troisièmes par le symbole $\Delta\Delta^2$ ou plus simplement Δ^3 . En continuant de la même manière, on obtiendra les différences des divers ordres des quantités proposées.

164. Les $m+1$ quantités proposées ont m différences premières, et par suite $m-1$ différences secondes, $m-2$ différences troisièmes, et enfin une seule différence de l'ordre m . On ne peut pas aller au delà. Nous disposerons le tableau des différences de la manière suivante :

u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$	$\Delta^5 u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_1$	$\Delta^4 u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	$\Delta^3 u_2$		
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$			
u_4	Δu_4				
u_5					

mettant dans une première colonne verticale les nombres proposés, dans la seconde colonne les différences premières, dans la troisième les différences secondes, et ainsi de suite. On remarque que l'indice de Δ reste le même dans une même colonne verticale, et l'indice de u dans une même ligne horizontale. Pour former ce tableau, on retranche chaque nombre de celui qui est placé au-dessous de lui, et on écrit le résultat à droite du premier. Ainsi on obtient Δu_0 en retranchant u_0 de u_1 , Δu_1 en retranchant u_1 de u_2 ,.....:

de même $\Delta^2 u_0$ en retranchant Δu_0 de Δu_1 , $\Delta^3 u_0$ en retranchant Δu_1 de Δu_2 , ... On a en général par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n;$$

si l'on retranche $\Delta^p u_n$ du nombre $\Delta^p u_{n+1}$ placé au-dessous de lui, on obtient le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite du premier.

Soient, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70 et 98. En appliquant la règle précédente, on formera le tableau des différences jusqu'au cinquième ordre :

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1	9	6	-2	5	-13
10	15	4	3	-8	
25	19	7	-5		
44	26	2			
70	28				
98					

On commence par écrire les six nombres proposés dans une colonne verticale. Retranchant chacun d'eux du suivant, on a les différences premières 9, 15, 19, 26, 28 que l'on écrit dans une seconde colonne; retranchant chacun des nombres de cette seconde colonne du suivant, on a les différences secondes 6, 4, 7, 2 que l'on écrit dans une troisième colonne, et ainsi de suite jusqu'à la différence cinquième à laquelle s'arrête le calcul.

163. Réciproquement si l'on donne le premier nombre u_0 et ses m différences successives Δu_0 , $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, on peut reconstituer le tableau et reproduire les m autres nombres u_1 , u_2 , ..., u_m . En effet, puisque $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, on a $u_1 = u_0 + \Delta u_0$. De même, puisque $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$, on a

$\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; connaissant Δu_1 , on obtient $u_2 = u_1 + \Delta u_1$. On trouve de la même manière $\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$, $\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$, $u_3 = u_2 + \Delta u_2$, et ainsi de suite. On remarque que *chaque nombre du tableau égale le nombre placé au-dessus de lui, plus celui qui est à droite de ce dernier*; car on a en général par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^p u_{n+1} = \Delta^p u_n + \Delta^{p+1} u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ égale le nombre $\Delta^p u_n$ placé au-dessus de lui, plus le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite de ce dernier.

On procède par lignes obliques, comme l'indique le tableau précédent; nous avons déjà calculé les trois premières lignes obliques; on continuera de la même manière: $\Delta^4 u_0$ ajouté à $\Delta^3 u_0$ donne $\Delta^4 u_1$; celui-ci ajouté à $\Delta^3 u_1$ donne $\Delta^4 u_2$; celui-ci ajouté à Δu_2 donne Δu_3 ; enfin, ce dernier ajouté à u_3 donne u_4 . Recommencant à partir de $\Delta^5 u_0$, on formera successivement les nombres $\Delta^4 u_1$, $\Delta^3 u_2$, $\Delta^2 u_3$, Δu_4 , u_5 de la ligne oblique suivante, et ainsi de suite. En poussant l'opération de proche en proche jusqu'à $\Delta^m u_0$, on arrivera finalement à u_m .

Soient, par exemple, le nombre 1 et ses cinq différences successives 9, 6, — 2, 5, — 13. On appliquera la règle précédente et l'on dira: 9 et 1.....10; 6 et 9.....15 et 10.....25; — 2 et 6..... 4 et 15.....19 et 25.....44; 5 et — 2.....3 et 4.....7 et 19..... 26 et 44.....70; — 13 et 5..... — 8 et 3..... — 5 et 7..... 2 et 26.....28 et 70.....98.

ÉTANT DONNÉS $m+1$ NOMBRES $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$, TROUVER : 1° L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL u_n EN FONCTION DU PREMIER TERME u_0 ET DE SES DIFFÉRENCES SUCCESSIVES ; 2° L'EXPRESSION DE $\Delta^n u_0$ EN FONCTION DES NOMBRES PROPOSÉS.

166. Supposons d'abord que l'on donne le nombre u_0 et ses m différences successives $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0$; il s'agit de trouver les nombres $u_1, u_2, \dots, u_m$. Nous savons que la question est possible, et nous avons indiqué dans le numéro précédent la manière d'effectuer le calcul de proche en proche ; mais nous cherchons ici une formule algébrique donnant l'expression d'un terme quelconque u_n de la suite en fonction des quantités données.

Commençons par établir un principe qui nous sera très-utile : c'est que *la différence de la somme de plusieurs quantités égale la somme des différences de ces quantités*. En effet, le mot *différence* signifie ici la variation qu'éprouve une quantité quand on passe à la quantité suivante ou quand on augmente l'indice d'une unité ; ainsi la différence de u_n est la variation $u_{n+1} - u_n$ qu'éprouve cette quantité quand on passe du terme u_n au suivant u_{n+1} ; de même, la différence de la quantité Δu_n est la variation $\Delta u_{n+1} - \Delta u_n$ qu'éprouve cette quantité quand on passe de la quantité Δu_n à la suivante Δu_{n+1} . Or il est clair que la variation d'une somme est égale à la somme des variations des parties qui la composent.

Cela posé, on a d'abord . .

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0.$$

On a aussi $u_2 = u_1 + \Delta u_1$; on connaît l'expression de u_1 ; on obtient la différence Δu_1 en remarquant que u_1 étant une

somme de deux quantités u_0 et Δu_0 , sa différence égale la somme des différences Δu_0 et $\Delta^2 u_0$ de ces deux quantités, ce qui donne $\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; si l'on remplace u_1 et Δu_1 par leurs valeurs, il vient

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

On a de même $u_3 = u_2 + \Delta u_2$; nous connaissons u_2 ; nous obtiendrons sa différence Δu_2 en prenant la différence de chacune des parties de la somme; il vient en ajoutant

$$u_3 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \quad = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0. \\ + \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$

On reconnaît les coefficients du développement de la puissance d'un binôme; l'expression de u_3 a pour coefficients ceux du carré d'un binôme; l'expression de u_2 ceux du cube. Nous allons faire voir que cette loi est générale. Pour cela, nous démontrerons que si elle est vraie pour u_n , elle l'est aussi pour u_{n+1} , c'est-à-dire que si l'expression de u_n a pour coefficients ceux de la n^{e} puissance du binôme, l'expression de u_{n+1} aura pour expression ceux de la $n+1^{\text{e}}$ puissance. Soit donc

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 \dots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + C_n^p \Delta^p u_0 \dots + \Delta^n u_0.$$

La différence du premier membre étant égale à la somme des différences de tous les termes du second membre, on a

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C_n^1 \Delta^2 u_0 \dots + C_n^{p-1} \Delta^p u_0 \dots + \Delta^{n+1} u_0.$$

Puisque $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$, si l'on ajoute les deux égalités précédentes, il vient

$$u_{n+1} = u_0 + C_n^1 \left| \begin{array}{c} \Delta u_0 + C_n^2 \\ + 1 \end{array} \right| \Delta^2 u_0 \dots + C_n^p \left| \begin{array}{c} \Delta^p u_0 \dots \\ + C_n^{p-1} \end{array} \right| \Delta^p u_0 \dots + \Delta^{n+1} u_0.$$

Mais $C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1$, $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$, ...; en général,
 $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$; le second membre se réduit donc à

$$u_{n+1} = u_0 + C_{n+1}^1 \Delta u_0 + C_{n+1}^2 \Delta^2 u_0 \dots + C_{n+1}^p \Delta^p u_0 \dots + \Delta^{n+1} u_0.$$

On voit que si la loi est vraie pour u_n , elle l'est aussi pour u_{n+1} . Comme elle est démontrée pour u_1 et u_2 , elle l'est pour u_3 , u_4 , et par conséquent pour un terme quelconque.

Ainsi nous avons la formule générale

$$(x) \quad u_n = u_0 + \frac{n}{1} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 \dots + \Delta^n u_0.$$

Au moyen de cette formule, on obtient chacun des nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$, en donnant à n l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, ... m . On peut écrire cette formule sous la forme symbole

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0,$$

en convenant de développer $(1 + \Delta)^n$ suivant la loi du binôme, comme si la lettre Δ désignait une quantité, et de regarder les exposants comme des indices.

On donne, par exemple, le nombre u_0 et ses cinq différences successives :

$$u_0 = 1, \Delta u_0 = 9, \Delta^2 u_0 = 6, \Delta^3 u_0 = -2, \Delta^4 u_0 = 5, \Delta^5 u_0 = -13,$$

si dans la formule (x) on fait $n = 4$, on a

$$u_4 = 1 + 4.9 + 6.6 - 4.2 + 5 = 70.$$

On obtient ainsi directement le nombre 70 que l'on a trouvé précédemment par un calcul de proche en proche.

167. Supposons maintenant que l'on donne les $m + 1$ nombres

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_m,$$

et que l'on veuille trouver les m différences successives du premier de ces nombres, savoir :

$$\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0.$$

On a d'abord

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0.$$

On a de même $\Delta u_1 = u_2 - u_1$; mais par définition $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$; si l'on retranche Δu_0 de Δu_1 , il vient

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0.$$

Cette expression s'applique évidemment à tous les termes indistinctement. Si donc on augmente tous les indices d'une unité, on aura de même $\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1$; mais $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0$; si l'on retranche $\Delta^2 u_0$ de $\Delta^2 u_1$, il vient

$$\begin{aligned} \Delta^3 u_0 &= u_3 - 2u_2 + u_1, &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0. \\ &- u_2 + 2u_1 - u_0. \end{aligned}$$

On reconnaît encore les coefficients du développement de la puissance du binôme. L'expression de $\Delta^2 u_0$ a pour coefficient ceux de $(a-b)^2$, l'expression de $\Delta^3 u_0$ ceux de $(a-b)^3$. Je vais démontrer que la loi est générale : admettons-la pour $\Delta^n u_0$ et soit

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} \dots \mp C_n^{p-1} u_{n-p+1} \pm C_n^p u_{n-p} \dots \pm u_0.$$

En augmentant d'une unité tous les indices de la lettre u , on a de même

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - C_n^1 u_n \dots \pm C_n^p u_{n-p+1} \dots \pm u_1.$$

Mais $\Delta^{n+1} u_0 = \Delta^n u_1 - \Delta^n u_0$; on obtient donc, en retranchant l'une de l'autre les deux expressions précédentes,

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - C_n^1 \left| \begin{array}{c} u_n \\ -1 \end{array} \right| + C_n^2 \left| \begin{array}{c} u_{n+1} \\ + C_n^1 \end{array} \right| \dots \pm C_n^p \left| \begin{array}{c} u_{n+1-p} \\ \pm C_n^{p-1} \end{array} \right| \dots \mp u_0,$$

ou en simplifiant,

$$\Delta^{n+1}u_0 = u_{n+1} - C_{n+1}^1 u_n + C_{n+1}^2 u_{n-1} \dots \pm C_{n+1}^p u_{n+1-p} \dots \mp u_0.$$

On voit par là que si la loi est vraie pour $\Delta^n u_0$, elle l'est aussi pour $\Delta^{n+1} u_0$. Comme elle a été démontrée pour $\Delta^1 u_0$ et $\Delta^2 u_0$, elle est vraie pour $\Delta^1 u_0$, $\Delta^2 u_0$, et par conséquent pour une différence d'ordre quelconque.

On a donc la formule générale

$$(\beta) \quad \Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1,2} u_{n-2} \dots \pm u_0.$$

Au moyen de cette formule on obtiendra chacune des m différences successives de u_0 , en donnant à n l'une quelconque des valeurs 1, 2, ..., m . On peut écrire cette formule sous la forme symbolique $\Delta^n u_0 = (u-1)^n$, en remplaçant dans le développement les exposants par des indices et le dernier terme 1 ou u^0 par u_0 .

On donne, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70 et 98. Si l'on fait $n=4$ dans la formule (β), on aura directement la différence

$$\Delta^4 u_0 = 70 - 4.44 + 6.25 - 4.10 + 1 = 5,$$

obtenue précédemment par un calcul de proche en proche.

LA DIFFÉRENCE DE L'ORDRE m D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m EST CONSTANTE, SI LA DIFFÉRENCE DE LA VARIABLE EST ELLE-MÊME CONSTANTE.

168. Soit $u = f(x)$ une fonction quelconque de la variable x ; si l'on donne à la variable $m+1$ valeurs

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m,$$

la fonction prendra une suite de valeurs correspondantes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_m,$$

dont nous pourrons prendre les différences des divers ordres, comme nous l'avons expliqué précédemment. Ordinairement les valeurs données à la variable forment une progression arithmétique dont on appelle h la raison. Supposons que x représente l'un quelconque des termes de la progression, $x + h$ étant le terme suivant; les valeurs correspondantes $f(x)$ et $f(x + h)$ de la fonction auront pour différence première $f(x + h) - f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence première* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta f(x)$. Si dans cette fonction $\Delta f(x)$ on remplace successivement x par chacun des termes de la progression, on obtiendra les m différences premières que fournissent les $m + 1$ valeurs correspondantes de la fonction.

De même si l'on donne à x deux valeurs consécutives x et $x + h$, les valeurs correspondantes de la fonction $\Delta f(x)$ auront une différence $\Delta f(x + h) - \Delta f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence seconde* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta^2 f(x)$. Et ainsi de suite.

Prenons comme exemple la fonction

$$u = a^x;$$

nous aurons

$$\Delta u = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Ainsi on forme la différence première de la fonction a^x en multipliant cette fonction par la quantité constante $a^h - 1$.

Il en résulte

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= a^x(a^h - 1)^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^n u &= a^x(a^h - 1)^n. \end{aligned}$$

169. Considérons en particulier la fonction entière du degré m . On a, en développant d'après la loi connue,

$$\Delta u = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots$$

La quantité h , raison de la progression arithmétique, est une constante; on voit par là que la différence première d'une fonction entière du degré m par rapport à la variable x est une fonction entière du degré $m-1$. De même la différence de la fonction Δu , ou la différence seconde de la fonction proposée, sera du degré $m-2$; $\Delta^2 u$ sera du degré $m-3$; en général $\Delta^n u$ sera du degré $m-n$. Enfin la différence d'ordre m sera du degré zéro; ce sera donc une constante, et par conséquent les différences d'un ordre plus élevé seront nulles.

170. REMARQUE. Soit

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

la fonction entière proposée, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x . Cette fonction étant la somme des termes qui la composent, sa différence d'un ordre quelconque est égale à la somme des différences du même ordre de ses différents termes. Il en résulte que la différence première ne dépendra pas du terme constant A_m , puisque la différence de ce terme est nulle; la différence seconde ne dépendra pas des deux derniers termes $A_{m-1} x + A_m$, puisque la différence seconde de cette partie est nulle; en général, la différence d'ordre n ne dépendra que des termes dont le degré est égal ou supérieur à n ; enfin la différence d'ordre m ne dépend que du premier terme $A_0 x^m$. Nous nous proposons de calculer cette différence d'ordre m .

Nous avons

$$\Delta u = hf'(x) + \dots;$$

le premier terme s'obtient en prenant la dérivée du polynôme proposé et multipliant par h ; les autres termes étant d'un degré inférieur à $m-1$, ne donneront rien dans $\Delta^m u$. Nous aurons, en appliquant la même règle,

$$\Delta^2 u = h^2 f''(x) + \dots,$$

$$\Delta^3 u = h^3 f'''(x) + \dots,$$

$$\dots$$

$$\Delta^n u = h^n f^{(n)}(x) + \dots$$

$$\dots$$

$$\Delta^m u = h^m f^{(m)}(x).$$

Le premier terme du polynôme $f(x)$ entrant seul dans la m^{e} dérivée, on aura finalement

$$\Delta^m u = 1.2.3 \dots m \Delta_0 h^m.$$

Exemples :

1° Former les carrés des nombres entiers. Considérons la fonction $u = x^2$, et supposons que l'on donne à x les valeurs 0, 1, 2, 3, ... en progression arithmétique. La fonction étant du second degré, la différence seconde $\Delta^2 u$ est constante et égale à $1.2.h^2$, c'est-à-dire à 2, puisque la raison h est l'unité; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. Pour commencer le tableau, il suffit d'écrire les deux premiers carrés 0 et 1 avec leur différence première 1 et la différence seconde 2 trouvée directement.

	Δ	Δ^2
0	1	2
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	
25		

On répétera la différence seconde constante 2 dans la troisième colonne autant que l'on voudra, et l'on dira, en calculant par lignes obliques, d'après la règle établie au n° 165 : 2 et 1...3 et 1...4 ; 2 et 3...5 et 4...9 ; 2 et 5...7 et 9...16 ; en continuant de cette manière on formera les carrés des nombres entiers consécutifs.

2° Former les cubes des nombres entiers. Considérons la fonction $u=x^3$ et donnons encore à x les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ... en progression arithmétique. La fonction étant du troisième degré, la différence troisième sera constante et égale à $1.2.3h^3$ ou 6. Pour commencer le tableau, nous écrivons les trois premiers cubes 0, 1, 8, d'où nous déduirons les différences premières 1 et 7, et la différence seconde 6 ; mettant ensuite à la droite la différence troisième constante 6 trouvée directement, on pourra effectuer le calcul des lignes obliques et obtenir les cubes des nombres entiers consécutifs.

	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	6	6
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	
64	61		
125			

3° Trouver la somme des carrés des n premiers nombres. Considérons la suite des quantités

$$u_0 = 0^2; u_1 = 0^2 + 1^2, u_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2, u_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2, \dots;$$

les différences premières sont les carrés consécutifs $1^2, 2^2, 3^2, \dots$; il résulte de ce qui a été dit précédemment que les différences secondes des différences premières, ou les différences troisièmes des nombres proposés, sont constantes et égales à 2; et par suite que les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. Écrivons le commencement du tableau avec les trois premiers nombres u_0, u_1, u_2 :

$$\begin{array}{l|l|l} u_0 = 0^2 & \Delta u_0 = 1 & \Delta^2 u_0 = 3 & \Delta^3 u_0 = 2. \\ u_1 = 0^2 + 1^2 & \Delta u_1 = 4 & & \\ u_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 & & & \end{array}$$

Servons-nous maintenant de la formule (2) démontrée au n° 166, formule qui exprime un terme quelconque u_n de la suite des nombres proposés au moyen du premier d'entre eux et de ses différences successives; ici les différences d'un ordre supérieur au troisième sont nulles; le développement se réduira donc à ses quatre premiers termes et l'on aura

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0,$$

et, en remplaçant les différences par leurs valeurs,

$$u_n = n + \frac{3n(n-1)}{1.2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4° Trouver la somme des cubes des n premiers nombres. Considérons la suite des quantités $u_0 = 0^3, u_1 = 0^3 + 1^3,$

$u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3$, $u_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3, \dots$; les différences premières sont les cubes consécutifs $1^3, 2^3, 3^3, \dots$; les différences troisièmes de ces différences premières, ou les différences quatrièmes des quantités proposées, sont constantes et égales à 6; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. On écrira le commencement du tableau avec les quatre premiers nombres

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} u_0 = 0^3 & \Delta u_0 = 1 & \Delta^2 u_0 = 7 & \Delta^3 u_0 = 12 & \Delta^4 u_0 = 6. \\ u_1 = 0^3 + 1^3 & \Delta u_1 = 8 & \Delta^2 u_1 = 19 & & \\ u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3 & \Delta u_2 = 27 & & & \\ u_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 & & & & \end{array}$$

Les différences d'un ordre supérieur au quatrième étant nulles, la formule (x) se réduit à ses cinq premiers termes et l'on a

$$\begin{aligned} u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \Delta^4 u_0, \end{aligned}$$

et, en remplaçant les différences par leurs valeurs,

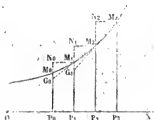
$$\begin{aligned} u_n = n + \frac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \\ = \frac{n^4(n^2-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les formules déjà obtenues par d'autres moyens (nos 55 et 57). Cette méthode permet de trouver avec la même facilité la somme des puissances quatrièmes, ou des puissances cinquièmes, ..., des nombres entiers consécutifs.

171. REMARQUE. Supposons que l'on porte sur la ligne

horizontale OX , à partir du point fixe O , des longueurs OP_0 , OP_1 , OP_2 , ..., égales aux valeurs x_0 , x_1 , x_2 , ..., que l'on

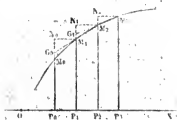
donne à la variable x et que l'on élève des perpendiculaires ou ordonnées P_0M_0 , P_1M_1 , P_2M_2 , ... égales aux valeurs correspondantes u_0 , u_1 , u_2 , ... de la fonction.



Si par les points M_1 , M_2 , ... on mène des horizontales M_1N_0 , M_2N_1 , ... jusqu'à la rencontre des ordonnées précédentes, on voit que les différences premières Δu_0 , Δu_1 , ... seront représentées par les longueurs M_0N_0 , M_1N_1 , ... affectées du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les ordonnées vont en augmentant ou en diminuant.

Dans le cas où les valeurs de x sont en progression arith-

métique, par les deux points M_0 , M_1 , faisons passer une droite jusqu'à la rencontre de la première ordonnée en G_0 ; par les deux points M_1 , M_2 , une droite jusqu'à la ren-



contre de la seconde ordonnée en G_1 , et ainsi de suite; les longueurs M_0G_0 , M_1G_1 , ... prises avec le signe $+$ ou le signe $-$, représenteront les différences secondes $\Delta^2 u_0$, $\Delta^2 u_1$, ... En effet, les triangles $M_1N_0G_0$ et $M_2N_1G_1$ sont égaux, et l'on a $N_0G_0 = M_1N_1 = \Delta u_1$; donc $M_0G_0 = N_0G_0 - M_0N_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$, etc. Lorsque la différence seconde est positive, le point G_0 est au-dessous de M_0 et la courbe

tourne sa concavité vers le haut ; c'est ce qui a lieu dans la première figure. Lorsque la différence seconde est négative, le point G_0 est au-dessus de M_0 , et la courbe tourne sa concavité vers le bas ; c'est le cas de la seconde figure.

CONNAISSANT LES RÉSULTATS DE LA SUBSTITUTION DE m NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS DANS UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m , ON OBTIENT FACILEMENT, AU MOYEN DES DIFFÉRENCES, LES RÉSULTATS DE LA SUBSTITUTION DE TOUS LES AUTRES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS. — APPLICATION AU CAS D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU TROISIÈME DEGRÉ, DONT ON CONNAÎT LES VALEURS CORRESPONDANTES AUX VALEURS $-1, 0, +1$ DE LA VARIABLE.

172. Considérons d'abord un polynôme du troisième degré

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

Nous nous proposons de calculer les valeurs que prend ce polynôme pour les valeurs entières

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

positives ou négatives, données à la variable x . En substituant directement les trois nombres simples $-1, 0, +1$, on obtient les trois résultats 24, 5 et -8 . Avec ces trois valeurs, on forme deux différences premières -19 et -13 , et une différence seconde 6. La fonction étant entière et du troisième degré, on sait que la différence troisième est constante et égale à $1.2.3.A_0h^3$, c'est-à-dire à 6 dans l'exemple actuel ; les différences d'ordre supérieur sont nulles. On peut donc prolonger le tableau indéfiniment par lignes obliques d'après la règle du n° 165, et obtenir les

valeurs du polynôme pour $x=2$, $x=3$, etc. Voici la disposition du tableau :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
+1	-8	-1	18	6
2	-9	17	24	6
3	8	41	30	
4	49	71		
5	120			

La première colonne verticale contient les valeurs de la variable x , la seconde les valeurs correspondantes de la fonction, et les suivantes les différences, comme à l'ordinaire. La dernière colonne contient la différence troisième constante 6 que l'on répète indéfiniment. On calcule en disant : 6 et 6.....12 et -13.....-1 et -8.....-9, valeur de la fonction pour $x=2$. Recommencant alors une nouvelle ligne oblique, on dit : 6 et 12.....18 et -1.....17 et -9.....8, valeur du polynôme pour $x=3$, etc.

On peut aussi prolonger le tableau vers le haut et trouver les valeurs de la fonction pour $x=-2$, $x=-3$, etc. On remarque, en effet, que *tout nombre du tableau est égal au nombre placé au-dessous de lui, moins celui qui est à sa droite*; car, de la relation générale

$$\Delta^{p+1}u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

on déduit

$$\Delta^p u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^{p+1}u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_n$ égale le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ placé au-dessous de lui, moins le nombre $\Delta^{p+1}u_n$ qui est à sa droite.

On procédera donc de la manière suivante :

-7	-72	71	-50	6
-6	-1	41	-24	6
-5	40	17	-18	6
-4	57	-1	-12	6
-3	56	-15	-6	6
-2	45	-19	0	6
-1	24	-19	6	6
x	u	Δ	Δ^2	Δ^3

La ligne horizontale inférieure contient la valeur de la fonction et ses différences successives pour $x = -1$, valeurs trouvées précédemment, et l'on a répété la différence troisième constante 6. Si de la différence seconde 6 on retranche la différence troisième 6, on a la différence seconde 0 qui correspond à $x = -2$; si de la différence première -19 on retranche la différence seconde 0, on a la différence première -19 qui correspond à $x = -2$; enfin, si du nombre 24 on retranche cette différence première -19, on obtient la valeur 45 du polynôme pour $x = -2$. On a formé de la sorte la seconde ligne horizontale au moyen de la première. De la seconde on déduira de même la troisième; on dira : 0 moins 6 donne -6; -19 moins -6 -15; 45 moins -15 56; telle est la valeur du polynôme pour $x = -3$. Continuons encore : -6 moins 6 -12; -15 moins -12 -1; 56 moins -1 57, valeur du polynôme pour $x = -4$, et ainsi de suite. Le calcul se fait ici par lignes horizontales successives. Ordinairement ces deux tableaux sont réunis quand la place le permet, et constituent un seul et même tableau que l'on

peut prolonger à volonté vers le bas par additions successives, vers le haut par soustractions.

173. Soit maintenant un polynôme du quatrième degré

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 5.$$

On substituera directement à la place de x les quatre nombres $-1, 0, 1, 2$, ce qui donne les quatre valeurs correspondantes $-13, 5, 7, -19$, avec lesquelles on forme trois différences premières $16, 4, -26$, deux différences secondes $-12, -30$, et une différence troisième -18 ; on connaît d'ailleurs la différence quatrième qui est constante et égale à $1.2.3.4.A_0h^4$ ou 24 , puisque la fonction est du quatrième degré; les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour pouvoir effectuer le calcul et prolonger dans un sens ou dans l'autre.

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-3	114	-110	96	-66	24
-2	+ 1	- 14	30	-42	24
-1	- 13	16	- 12	- 18	24
0	5	4	- 30	6	24
1	7	- 26	- 24	30	24
2	- 19	- 50	6	54	24
3	- 69	- 44	60	78	
4	- 113	16	138		
5	- 97	154			
6	57				

174. Considérons, en général, une fonction entière $u = f(x)$ du degré m ; supposons que l'on donne à la va-

riable m valeurs en progression arithmétique

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + (m-1)h,$$

et que l'on connaisse les m valeurs correspondantes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$$

de la fonction. Avec ces m valeurs, on formera $m-1$ différences premières, $m-2$ différences secondes, ..., et enfin une différence de l'ordre $m-1$. La fonction étant entière et du degré m , on sait que sa différence d'ordre m est constante et égale à $1.2.\dots.m\Lambda_0 h^m$, et que les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour calculer le tableau des différences; si l'on effectue le calcul par lignes obliques en descendant, on obtiendra les valeurs de la fonction qui correspondent aux termes suivants $x_0 + mh, x_0 + (m+1)h, \dots$, de la progression arithmétique; si, au contraire, on remonte par lignes horizontales, on trouvera les valeurs qui correspondent aux termes précédents $x_0 - h, x_0 - 2h, \dots$. En résumé, le calcul de m valeurs par substitution directe suffit pour que l'on puisse trouver toutes les autres.

Il est à remarquer que la substitution directe d'un nombre a à la place de x s'effectue assez simplement d'après le procédé du n° 153. On opérera sans rien écrire comme si l'on voulait diviser le polynôme par $x-a$: le reste est le résultat cherché.

FORMULES D'INTERPOLATION.

Définition:

175. Supposons que l'on ait trouvé par un moyen quelconque les $m+1$ valeurs

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$$

que prend une fonction lorsqu'on donne à la variable $m + 1$ valeurs

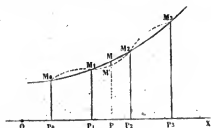
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m.$$

Interpoler, c'est trouver les valeurs de la fonction pour les valeurs intermédiaires de la variable.

Par exemple, on a calculé les logarithmes des nombres entiers de 10000 à 100000. Interpoler, c'est trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire compris dans l'un des intervalles.

Autre exemple : par des expériences directes, on a mesuré la tension de la vapeur d'eau pour des températures de 10 en 10 degrés, depuis 100 jusqu'à 200 degrés. Interpoler, c'est trouver la tension de la vapeur pour une température intermédiaire.

Le problème de l'interpolation n'est pas déterminé, parce qu'on ne connaît pas en général la nature de la fonction, mais seulement certaines valeurs particulières et qu'il est impossible d'en déduire rigoureusement les autres valeurs; on conçoit, en effet, qu'il existe une infinité de fonctions égales à des valeurs données pour $m + 1$ valeurs de la variable, sans qu'elles se confondent pour cela dans les intervalles. Afin de bien mettre ceci en évidence, imaginons que l'on représente les valeurs données de la fonc-



tion par des ordonnées comme au n° 171, et supposons que l'on trace une courbe passant par les $m+1$ points $M_0, M_1, M_2, \dots$, ainsi obtenus; l'ordonnée de cette courbe représentera une certaine fonction $u=f(x)$ admettant les $m+1$ valeurs données; si maintenant l'on donne à x une valeur intermédiaire OP quelconque et que l'on mesure la longueur de l'ordonnée correspondante MP , on aura la valeur cherchée de la fonction; la courbe tracée résout donc le problème de l'interpolation. Mais il est évident que par les $m+1$ points donnés, on peut faire passer une infinité de courbes. Ces diverses courbes donneront pour la même valeur OP de x des valeurs différentes MP, MP' . Ainsi il y a indétermination. Si l'on emploie une courbe pour effectuer l'interpolation, ce qui est un moyen très-commode dans la pratique, on aura soin de la tracer aussi unie que possible, en évitant les sinuosités inutiles.

En algèbre, on effectue l'interpolation en cherchant une fonction entière du degré m qui admette les $m+1$ valeurs données. Alors la question est complètement déterminée: nous démontrerons, en effet, qu'il existe toujours une fonction entière du degré m jouissant de ces propriétés, et qu'il n'en existe qu'une. Une fois cette fonction trouvée, on pourra calculer les valeurs qu'elle prend pour des valeurs intermédiaires quelconques de x ; mais ces valeurs calculées ne doivent être considérées que comme des valeurs approchées de la fonction inconnue. On conçoit que les erreurs commises seront d'autant plus petites que le nombre des valeurs données sera plus grand et surtout que les intervalles seront plus petits.

Formule de Lagrange.

176. La question que nous avons à résoudre est la sui-

vante : trouver une fonction entière du degré m qui admette $m + 1$ valeurs données

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_m,$$

pour $m + 1$ valeurs données

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$$

de la variable x .

Soit

$$u = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + Gx + H$$

la fonction cherchée. Elle renferme $m + 1$ coefficients inconnus. Puisque cette fonction doit prendre les $m + 1$ valeurs $u_0, u_1, \dots, u_m$ pour les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_m$ de x , on a les $m + 1$ équations

$$Ax_0^m + Bx_0^{m-1} \dots + Gx_0 + H = u_0,$$

$$Ax_1^m + Bx_1^{m-1} \dots + Gx_1 + H = u_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Ax_m^m + Bx_m^{m-1} \dots + Gx_m + H = u_m,$$

qui détermineront les $m + 1$ coefficients inconnus $A, B, \dots, H$. Ces équations sont du premier degré; si on les imagine résolues, on aura, d'après la formule établie au n° 5, des valeurs de la forme

$$A = A_0u_0 + A_1u_1 \dots + A_mu_m,$$

$$B = B_0u_0 + B_1u_1 \dots + B_mu_m,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$H = H_0u_0 + H_1u_1 \dots + H_mu_m.$$

d'où

$$A_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)}.$$

On aura donc finalement

$$X_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)}.$$

La fonction X_1 s'annulant pour les m valeurs $x_0, x_2, \dots, x_m$ de x et se réduisant à l'unité pour $x = x_1$, sera pareillement

$$X_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_m)},$$

et de même pour toutes les autres.

Ainsi la fonction cherchée u est donnée par la formule suivante, trouvée par Lagrange,

$$(A) \quad u = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)} u_0 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_m)} u_1 + \dots$$

177. Nous avons trouvé une fonction entière du degré m jouissant des propriétés énoncées. On démontre aisément qu'il n'en existe qu'une, c'est-à-dire que si deux polynômes entiers du degré m sont égaux pour $m + 1$ valeurs de x , ils sont identiques. Soient, en effet,

$$Ax^m + Bx^{m-1} \dots + H, \\ A'x^m + B'x^{m-1} \dots + H',$$

ces deux polynômes; en les retranchant l'un de l'autre, on

aura une équation du degré m

$$(A-A')x^m + (B-B')x^{m-1} \dots + (H-H') = 0,$$

ayant $m+1$ racines, ce qui est impossible. Il faut donc que les coefficients soient respectivement égaux, et alors les deux polynômes sont identiques.

Formule de Newton.

178. La formule de Lagrange est générale; elle est vraie quelles que soient les $m+1$ valeurs données à la variable; celle de Newton se rapporte spécialement au cas où ces valeurs sont en progression arithmétique.

Soient

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh, \dots, x_0 + mh$$

les $m+1$ valeurs données à la variété x ;

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_m$$

les valeurs correspondantes de la fonction u . Avec ces $m+1$ valeurs, on peut former les m différences successives

$$\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0.$$

Reprenons la formule (x) du numéro 166

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1,2} \Delta^2 u_0 \dots + \Delta^n u_0,$$

qui exprime un terme quelconque de la suite proposée au moyen du premier et de ses n différences successives. Le second membre s'arrête à $\Delta^n u_0$; mais on peut, sans inconvénient,

venient, le prolonger jusqu'à $\Delta^m u_0$ et l'écrire de la manière suivante

$$(1) \quad u_n = u_0 + \frac{n}{1} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} \Delta^m u_0;$$

car les termes ajoutés ainsi, contenant le facteur $n - n$, sont nuls. Appelons x un terme quelconque $x_0 + nh$ de la progression arithmétique, et u la valeur correspondante u_n de la fonction. Nous posons $x = x_0 + nh$; il en résulte $n = \frac{x - x_0}{h}$. Si l'on remplace n par sa valeur dans l'équation (1), il vient

$$(B) \quad u = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \frac{\Delta u_0}{1} + \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \dots \\ \dots + \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \dots \left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1 \right) \frac{\Delta^m u_0}{1.2 \dots m}.$$

On voit d'abord que le second membre de l'équation (B) est une fonction entière du degré m par rapport à x ; car le second terme est du premier degré, le troisième du second, ..., le dernier, étant un produit de m facteurs du premier degré, est du degré m ; ce terme du degré m , ne pouvant se réduire avec aucun autre, subsistera nécessairement dans le polynôme qui sera ainsi du degré m . On voit ensuite que cette fonction prend les $m + 1$ valeurs données $u_0, u_1, \dots, u_m$ pour les $m + 1$ valeurs données de x ; car si dans cette fonction on remplace x par un terme quelconque $x_0 + nh$ de la progression arithmétique, ou $\frac{x - x_0}{h}$ par n , elle devient évidemment égale au second membre de l'équation (1), c'est-à-dire à la quantité u_n .

Ainsi la formule (B) nous donne bien la fonction entière du degré m , qui, pour $m + 1$ valeurs données de x en progression arithmétique, prend les $m + 1$ valeurs données $u_0, u_1, \dots, u_m$. C'est la formule d'interpolation de Newton. Elle contient, non pas précisément les valeurs données de la fonction, mais les différences successives qu'on en déduit, et ceci est un grand avantage, parce que, ces différences diminuant en général très-rapidement, on se bornera dans la pratique aux premiers termes, et on négligera tous les autres.

179. Afin de simplifier posons $\frac{x - x_0}{h} = z$, la formule (B) devient

$$(C) \quad u = u_0 + \frac{z}{1} \Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots \\ \dots + \frac{z(z-1) \dots (z-m+1)}{1.2 \dots m} \Delta^m u_0.$$

Supposons que l'on interpole dans le premier intervalle, c'est-à-dire de x_0 à $x_0 + h$; z sera une fraction moindre que l'unité.

Lorsque les différences d'un ordre supérieur au premier sont assez petites pour qu'on puisse les négliger, la formule se réduit à ses deux premiers termes

$$u = u_0 + z \Delta u_0.$$

L'accroissement $u - u_0$ de la fonction est proportionnel à l'accroissement z de la variable; on dit dans ce cas que l'on interpole par parties proportionnelles. C'est le mode très-simple d'interpolation que l'on emploie quand, au moyen des tables de logarithmes, on cherche les logarithmes des nombres fractionnaires. Réciproquement, si l'on veut trou-

ver la valeur de la variable qui rend la fonction égale à une quantité donnée u , on aura $z = \frac{u - u_0}{\Delta u_0}$.

Lorsqu'on conserve les deux premières différences, la formule d'interpolation devient

$$u = u_0 + z\Delta u + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0.$$

Alors la question inverse se résout au moyen d'une équation du second degré, dont on calculera la racine comprise entre 0 et 1, l'autre racine étant en général très-grande à cause de la petitesse du coefficient de z^2 (1^{re} partie, n° 170).

Exemples.

1° La fonction $u = \log x$ a pour différences successives

$$\Delta u = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\right),$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x = \log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= -M\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \dots\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 u &= \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x \\ &= \log\left(1 + \frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= M\left(\frac{2h^3}{x^3} - \dots\right). \end{aligned}$$

Pour $h = 1$ et $x = .10000$, on a

$$\Delta u = 0,00004 \ 34270 \ 76863,$$

$$\Delta^2 u = -0,00000 \ 00043 \ 42076,$$

$$\Delta^3 u = 0,00000 \ 00000 \ 00868.$$

On voit que les différences décroissent très-rapidement ; la différence seconde étant moindre que l'unité du huitième ordre décimal, on peut la négliger lorsqu'on prend les logarithmes avec sept décimales, comme cela a lieu avec les tables de Callet, et interpoler par parties proportionnelles.

2° Proposons-nous de calculer le logarithme de π au moyen d'une table contenant les logarithmes des nombres de 1 à 1000 avec dix décimales. Prenant dans cette table les logarithmes des nombres 3,14, 3,15, ... , et calculant les différences successives, on formera le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
3,14	0,49692 96481	138 09057	—43769	277	—3
3,15	0,49851 05538	137 65288	—43492	274	
3,16	0,49968 70826	137 21796	—43218		
3,17	0,50105 92622	136 78578			
3,18	0,50242 71200				

On négligera donc les différences d'un ordre supérieur au quatrième, et l'on interpolera au moyen de la formule

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1.2.3.4} \Delta^4 u_0.$$

Puisque $\pi = 3,14159\ 26536$ et que $h = 0,01$, on a $z = 0,159\ 26536$. Substituant cette valeur de z dans la formule précédente et effectuant les multiplications par la méthode abrégée, on trouvera, avec dix décimales exactes,

$$\log \pi = 0,49714\ 98726.$$

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION DE NEWTON A LA REPRÉSENTATION EXACTE D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m DONT ON CONNAÎT LES VALEURS $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ CORRESPONDANTES AUX VALEURS $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + mh$.

180. Cette question n'offre aucune difficulté; c'est la question même que l'on a résolue quand on a cherché la formule d'interpolation de Newton (n° 178). Au moyen des valeurs données

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_m,$$

on formera la suite des différences

$$u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0;$$

on remplacera dans la formule (B) ces différences par leurs valeurs, et on aura la fonction entière demandée.

On demande, par exemple, la fonction entière du troisième degré, qui admette les valeurs 5, — 8, — 9, 8 pour les quatre valeurs 0, 1, 2, 3 de la variable. Le tableau des différences donne $u_0 = 5, \Delta u_0 = -13, \Delta^2 u_0 = 12, \Delta^3 u_0 = 6$; substituant dans la formule (B), on a la fonction cherchée

$$u = 5 - 13x + 6x(x-1) + x(x-1)(x-2),$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

Autre exemple : Trouver la fonction entière du quatrième degré qui admette les valeurs 1, — 13, 5, 7, — 19 pour les cinq valeurs — 2, — 1, 0, 1, 2 de x . On formera les différences

$$u_0 = 1, \Delta u_0 = -14, \Delta^2 u_0 = 30, \Delta^3 u_0 = -42, \Delta^4 u_0 = 24,$$

que l'on substituera dans la formule (B), ce qui donne

$$u = 1 - 14(x+2) + 15(x+2)(x+1) - 7(x+2)(x+1)x \\ + (x+2)(x+1)x(x-1),$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3.$$

SI LA DIFFÉRENCE h ET LES QUANTITÉS $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots$
 $\dots \Delta^m u_0$ SONT POSITIVES, $x_0 + (m-1)h$ EST UNE
 LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES DE L'ÉQUATION
 $f(x) = 0$.

181. Imaginons la fonction entière $u = f(x)$ du degré m représentée par la formule (B)

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h} \frac{\Delta u_0}{1} + \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \dots \\ \dots + \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - m + 1 \right) \frac{\Delta^m u_0}{1.2 \dots m},$$

comme nous venons de l'expliquer, et supposons que toutes les quantités

$$u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^m u_0$$

soient positives, la raison h de la progression étant aussi positive. Si l'on donne à la variable x une valeur supérieure à $x_0 + (m-1)h$, tous les facteurs binômes que renferme le second membre deviendront positifs; car le dernier

$$\frac{x-x_0}{h} - (m-1),$$

qui est le plus petit d'entre eux, acquiert alors une valeur

positive; la fonction étant une somme de termes positifs, a nécessairement une valeur positive. Il en est de même si l'on donne à x la valeur $x_0 + (m-1)h$; car cette valeur, annulant le dernier facteur binôme et par conséquent le dernier terme, mais laissant positifs tous les autres, le polynôme sera encore une somme de termes positifs. Ainsi, x croissant indéfiniment à partir de $x_0 + (m-1)h$, la fonction conserve toujours une valeur positive sans devenir nulle; donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racine positive égale ou supérieure à la quantité $x_0 + (m-1)h$. Cette quantité est une limite supérieure des racines positives de l'équation; on donne en général ce nom à toute quantité positive plus grande que la plus grande raison positive.

Dans l'exemple du n° 172, nous voyons que, pour $x=5$, le polynôme a une valeur positive 8 et que les différences correspondantes 41, 30, 6 sont aussi positives. En faisant $h=1$ et $x_0=3$ dans la formule $x_0 + (m-1)h$, on en conclut que 5 est une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

De même, dans l'exemple du n° 173, nous voyons que pour $x=6$ le polynôme a une valeur positive 57 et que toutes les différences correspondantes sont aussi positives; car pour les former on n'aurait à additionner que des quantités positives. Le degré m étant ici égal à 4; on en conclut que $6+3$ ou 9 est une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0.$$

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES A LA SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

SÉPARATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE PAR LA SUBSTITUTION DE DIFFÉRENTS NOMBRES A L'INCONNUE. — ÉTUDE SPÉCIALE DU CAS D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ. — SUBSTITUTION DE NOMBRES ENTIERS PAR LE MOYEN DES DIFFÉRENCES. — SUBSTITUTION DE NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN DIXIÈME ENTRE DEUX NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS; DE NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN CENTIÈME ENTRE DEUX NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN DIXIÈME, ETC., SOIT POUR SÉPARER LES RACINES, SOIT POUR EN APPROCHER. — CES DERNIÈRES SUBSTITUTIONS S'EFFECTUENT AU MOYEN DE NOUVELLES DIFFÉRENCES, DÉDUITES DES PREMIÈRES. — USAGE DES CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES DANS L'APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

Résolution des équations du troisième degré.

182. *Séparer les racines d'une équation, c'est trouver des intervalles dans lesquels soient comprises les diverses*

racines réelles de l'équation, de manière qu'il n'y ait qu'une racine dans chaque intervalle. Pour effectuer la séparation des racines, on substitue ordinairement des nombres équidistants, et quand il s'agit d'une équation algébrique, on abrège beaucoup les calculs par le moyen des différences.

Reprenons l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

Le théorème de Descartes sur les variations montre que cette équation a une racine réelle négative et deux ou aucune racines positives. En substituant directement les trois nombres $-1, 0, +1$, et continuant le calcul par les différences, comme nous l'avons expliqué au n° 172, on obtient le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-6	-1	41	-24	6
-5	40	17	-18	6
-4	57	-1	-12	6
-3	56	-13	-6	6
-2	43	-19	0	6
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
1	-8	-1	18	
2	-9	17		
3	8			

Le polynôme ayant des valeurs de signes contraires pour $x=0$ et $x=1$, on en conclut qu'une première racine réelle positive est comprise entre 0 et 1; la seconde ra-

cine positive est comprise entre 2 et 3; la racine négative entre — 6 et — 5. L'équation proposée a ses trois racines réelles, et ces racines sont séparées.

On a ainsi les racines à moins d'une unité près. Pour avoir l'une d'elles à un dixième près, on substituera des nombres équidistants d'un dixième dans l'intervalle qui la comprend. Par exemple, pour trouver la racine comprise entre 2 et 3, on substituera des nombres équidistants d'un dixième de 2 à 3. On pourrait substituer directement trois nombres 2, 2,1, 2,2, puis continuer par les différences; mais on évite la substitution directe des deux nombres 2, 1 et 2,2 qui entraînerait à des calculs assez longs, en cherchant les différences successives qui se rapportent à $x=2$ quand la raison de la progression arithmétique devient égale à $\frac{1}{10}$ et déduisant ces nouvelles différences des premières.

183. Nous allons expliquer une manière simple d'effectuer ce calcul pour le cas spécial du troisième degré.

Soit $f(x)$ un polynôme du troisième degré. On a d'abord

$$\Delta f(x) = f(x)h + \frac{f'(x)}{2}h^2 + \frac{f''(x)}{6}h^3.$$

Si l'on appelle $\varphi(x)$ le second membre, qui est un polynôme du second degré, on aura de même

$$\Delta^2 f(x) = \Delta \varphi(x) = \varphi'(x)h + \frac{\varphi''(x)}{2}h^2.$$

Or, en dérivant le polynôme $\varphi(x)$ et remarquant que $f'''(x)$ est une constante, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f''(x)h + \frac{f'''(x)}{2}h^2, \\ \varphi''(x) &= f'''(x)h;\end{aligned}$$

substituons dans $\Delta^2 f(x)$, il vient

$$\Delta^2 f(x) = f''(x)h^2 + f'''(x)h^3.$$

Enfin, si l'on appelle $\psi(x)$ le second membre qui est un polynôme du premier degré, on aura

$$\Delta^2 f(x) = \Delta \psi(x) = \psi'(x)h = f''(x)h^2.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3,$$

$$\Delta^2 f(x) = f''(x)h^2 + f'''(x)h^3,$$

$$\Delta^3 f(x) = f'''(x)h^3.$$

La différence troisième est constante. La seconde expression peut être remplacée par une autre plus simple; car on a par définition

$$\Delta^2 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^2 f(x-h),$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^2 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^2 f(x-h) = f'''(x)h^2.$$

Il en résulte finalement les relations suivantes :

$$\Delta^3 f(x) = f'''(x)h^3,$$

$$\Delta^2 f(x-h) = f'''(x)h^2,$$

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{\Delta^2 f(x-h)}{2} + \frac{\Delta^3 f(x)}{6}.$$

Nous remarquons que $f'''(x)h^3$ égale la différence troisième, que $f''(x)h^2$ égale la différence seconde antérieure, c'est-à-dire celle qui correspond à $x-h$, et que, pour trouver $f'(x)h$, il faut de la différence première retrancher la moitié de la différence seconde antérieure, et le sixième de la différence troisième.

Supposons maintenant que la raison de la progression arithmétique devienne dix fois plus petite, c'est-à-dire égale à $\frac{h}{10}$, et désignons par δ les différences qui correspondent à cette nouvelle progression; pour trouver ces nouvelles différences, il suffira, dans les expressions précédentes, de remplacer la lettre Δ par δ et h par $\frac{h}{10}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\delta^3 f(x) &= \frac{f'''(x)h^3}{1000} = \frac{\Delta^3 f(x)}{1000}, \\ \delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right) &= \frac{f''(x)h^2}{100} = \frac{\Delta^2 f(x-h)}{100}, \\ \delta f(x) &= \frac{f'(x)h}{10} + \frac{\delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right)}{2} + \frac{\delta^3 f(x)}{6}.\end{aligned}$$

La comparaison de ces formules avec les précédentes nous donne les règles suivantes : 1° On obtient la nouvelle différence troisième en divisant par 1000 l'ancienne différence troisième. 2° On obtient la nouvelle différence seconde antérieure en divisant par 100 l'ancienne différence seconde antérieure. 3° Pour trouver la nouvelle différence première, de l'ancienne différence première retranchez la moitié de l'ancienne différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième, divisez le résultat par 10 et ajoutez-y la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième.

184. EXEMPLE I. Appliquons cette méthode à l'équation

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre 0 et 1; pour calculer cette racine à un dixième près, nous supposons

que la raison de la progression arithmétique, qui était l'unité, devient égale à $\frac{1}{10}$, et nous formerons le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
— 0,1			0,060	0,006
0,0	5,000	— 1,669	0,066	0,006
0,1	3,331	— 1,603	0,072	0,006
0,2	1,728	— 1,531	0,078	
0,3	0,197	— 1,453		
0,4	— 1,256			

Nous supposons ici que, dans les formules de transformation, $x=0$. En divisant par 1000 l'ancienne différence troisième 6, on a la nouvelle 0,006; l'ancienne différence seconde antérieure 6, celle qui correspond à $x=-1$, divisée par 100, donne la nouvelle différence seconde antérieure 0,06, celle qui correspond à $-0,1$. Si de l'ancienne différence première -15 , on retranche $3+1=4$, c'est-à-dire la moitié de la différence seconde antérieure 6 et le sixième de la différence troisième 6, on a -17 , valeur de $f'(0)$; divisant ce résultat par 10 et à $-1,7$ ajoutant $0,05+0,001=0,051$, c'est-à-dire la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure 0,06 et le sixième de la différence troisième 0,006, on a la nouvelle différence première $-1,669$. Avec cela on peut continuer le tableau. On voit que la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

Si l'on veut obtenir cette racine à un centième près, on partagera l'intervalle de 0,3 à 0,4 en dix parties égales; la raison de la progression arithmétique, qui était $\frac{1}{10}$, de-

vient égale à $\frac{1}{100}$; on déduira donc les nouvelles différences des précédentes d'après la règle énoncée.

		Δ	Δ^2	Δ^3
0,29			780	6
0,30	0,197000	-148909	786	
0,31	0,048091	-148123		
0,32	-0,100032			

Les nouvelles différences renferment six chiffres décimaux; pour abréger nous les écrivons en transportant la virgule de six rangs vers la droite. La racine est comprise entre 0,31 et 0,32.

Pour avoir la racine à un millième près, on partagera en dix parties égales l'intervalle de 0,31 à 0,32, et des dernières différences on déduira les nouvelles d'après le même procédé.

		Δ	Δ^2	Δ^3
0,309			7860	6
0,310	0,048091000	-14847769	7866	
0,311	0,033243231	-14839903	7872	
0,312	0,018403328	-14832051	7878	
0,313	0,003571297	-14824153		
0,314	-0,011252856			

La racine est comprise entre 0,313 et 0,314.

185. EXEMPLE II. Dans l'exemple précédent les racines ont été séparées par la substitution des nombres entiers; mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans ce cas on examine

dans quel intervalle sont situées les racines qui n'ont pas été séparées, et l'on partage cet intervalle en dix parties égales. Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

-4	-29	30	-18	6
-5	1	12	-12	6
-2	13	0	-6	6
-1	13	-6	0	6
0	7	-6	6	6
1	1	0	12	
2	1	12		
3	13			

ne présente qu'un changement de signe, de -3 à -4 ; il y a une racine négative dans cet intervalle; d'ailleurs, l'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée n'admet pas d'autre racine négative. La condition de réalité des racines (n° 161) étant ici satisfaite, il en résulte que l'équation a deux racines positives, mais elles ne sont pas encore séparées. Tous les nombres entiers positifs donnent en effet au polynôme des valeurs positives; on le reconnaît dès que $x = 1$; car lorsqu'on arrive à une ligne oblique composée de nombres positifs, les calculs suivants, consistant à ajouter les uns aux autres des nombres positifs, conduiront toujours à des résultats positifs. D'ailleurs la valeur du polynôme pour $x = 1$, et les différences correspondantes étant positives, le nombre 3 est une limite supérieure des racines; ainsi les deux racines positives sont comprises entre 0 et 3 et elles sont toutes les

deux situées dans le même intervalle ; il s'agit de voir dans lequel. Considérons pour cela l'équation

$$3x^2 - 7 = 0,$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation proposée ; nous savons (n° 160) qu'entre les deux racines positives de l'équation proposée, il y a une racine de la dérivée ; cette racine est la racine positive $\sqrt{\frac{7}{3}}$, supérieure à 1, mais inférieure à 2. Mais l'intervalle qui comprend les deux racines cherchées doit comprendre aussi la quantité $\sqrt{\frac{7}{3}}$, qui est située entre elles ; donc cet intervalle est celui de 1 à 2. Afin de séparer les racines, nous partagerons cet intervalle en dix parties égales.

0,9			60	6
1,0	1,000	— 369	66	6
1,1	0,631	— 303	72	6
1,2	0,328	— 231	78	6
1,3	0,097	— 155	84	6
1,4	— 0,056	— 69	90	6
1,5	— 0,125	+ 21	96	6
1,6	— 0,104	117	102	6
1,7	+ 0,013	219	108	6
1,8	0,232	327	114	
1,9	0,559	441		
2,0	1,000			

On voit que l'une des racines est comprise entre 1,5 et 1,4, l'autre entre 1,6 et 1,7.

Voici le calcul de ces deux racines à un centième près :

1,29			780	
1,30	0,097000	—18909	786	6
1,31	0,078091	—18123	792	6
1,32	0,059968	—17331	798	6
1,33	0,042637	—16533	804	6
1,34	0,026104	—15729	810	
1,35	0,010375	—14919		
1,36	—0,004544			

La première racine est comprise entre 1,35 et 1,36.

Comme la seconde racine est beaucoup plus près de 1,7 que de 1,6, parce que la première valeur donne au polynôme une valeur absolue beaucoup plus petite que la seconde; on abrégera les calculs en partant de 1,7 et rétrogradant

1,69	—0,003191	16191	1020	6
1,70	+0,013000	17211		

La seconde racine est comprise entre 1,69 et 1,70.

186. EXEMPLE III. Considérons encore l'équation

$$f(x) = x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Substituons d'abord les nombres entiers :

— 1	293	— 112	22	6
0	181	— 90	28	6
1	91	— 62	34	6
2	29	— 28	40	6
3	1	+ 12	46	
4	13	58		
5	71			

L'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation,

l'équation proposée a une racine négative et une seule ; en prolongeant le tableau vers le haut, on verrait qu'elle est comprise entre -17 et -18 . Les deux autres racines seront réelles positives, ou imaginaires. Les nombres entiers positifs donnent tous des résultats positifs ; car dès $x = 3$, on n'a que des nombres positifs à ajouter. Ainsi les deux racines positives, si elles existent, seront comprises dans le même intervalle. Pour reconnaître cet intervalle, on examinera les racines de l'équation

$$f'(x) = 3x^2 + 22x - 102 = 0,$$

qui sont réelles, l'une positive, l'autre négative. La racine positive $x' = \frac{-11 + \sqrt{427}}{3} = 3,22\dots$ devant être comprise entre les deux racines positives de l'équation proposée, on en conclut que, si l'équation proposée admet des racines positives, elles seront comprises entre 3 et 4. Partageons cet intervalle en dix parties égales :

2,9			400	6
3,0	1,000	-0,699	406	6
3,1	0,301	-0,29 ³	412	
3,2	0,008	+0,11 ⁹		
3,3	0,127			

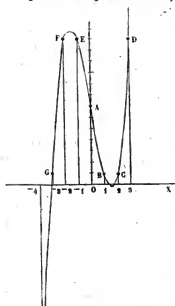
Il est inutile de prolonger le tableau ; car, arrivé à 3,2, on n'a que des nombres positifs à ajouter ; ainsi il n'y a pas de changement de signe, et les deux racines sont encore renfermées dans le même intervalle. D'après la valeur de x' cet intervalle est celui de 3,2 à 3,3 ; nous le partagerons en dix parties égales :

3,19			4120	6
3,20	+ 0,008000	-6739	4126	6
3,21	+ 0,001261	-2613	4132	
3,22	- 0,001352	+1519		
3,23	+ 0,000167			

Il existe effectivement deux racines réelles positives, l'une comprise entre 3,21 et 3,22, l'autre entre 3,22 et 3,23.

187. REMARQUE. Des considérations géométriques aident souvent à discerner l'intervalle dans lequel sont comprises les racines, lorsqu'elles ne sont pas séparées.

Reprenons l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. Construisons les



ordonnées correspondant aux valeurs entières de la variable, et traçons une courbe par les points ainsi obtenus. La dérivée $f'(x)$ étant du second degré ne peut s'annuler que deux fois et la courbe ne présentera qu'un maximum et un minimum. Le maximum a lieu entre E et F; Le minimum devra être situé nécessairement entre les points B et C; donc c'est dans cet intervalle que seront comprises les deux racines réelles positives.

L'emploi de la courbe ne réussit pas aussi bien par l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Si l'on trace la courbe, on voit que le minimum a lieu entre 2 et 5 ou entre 3 et 4, probablement entre 3 et 4; mais cependant on ne peut le décider d'une manière certaine. Il faut alors recourir aux racines de l'équation $f'(x) = 0$, qui dans tous les cas permettront de décider immédiatement la question.

188. EXEMPLE IV. Soit l'équation

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0.$$

La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe de 1 à 2. L'équation

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = 0$$

ayant ses racines imaginaires, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 1 et 2.

EXEMPLE V. L'équation

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$$

n'a pas de racine négative; la substitution des nombres entiers positifs ne donne qu'un changement de signe, de 5 à 4. L'équation

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$$

a ses racines réelles 1 et $\frac{5}{3}$. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine 1 de la dérivée devrait donner un résultat positif, la plus grande $\frac{4}{3}$ un résultat négatif; la valeur du polynôme pour $x = 1$ étant négative, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Exemple VI. La substitution des entiers dans le premier membre de l'équation

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0$$

ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. L'équation $f'(x) = 0$ a ses deux racines, $x' = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $x'' = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, réelles et comprises entre 0 et 1. Il faudrait substituer par dixièmes dans cet intervalle; si le nouveau tableau ne présente pas de changement de signe il faudrait substituer par centièmes dans l'intervalle qui comprend x' , et ainsi de suite. Mais on s'expose ainsi à faire une longue suite de calculs inutiles, si on n'arrive pas à un changement de signe, et après lesquels il serait impossible de rien conclure. Il vaut mieux simplifier d'abord l'équation, en faisant disparaître le terme du second degré, et y appliquer le caractère de réalité des racines. Pour opérer cette simplification, on remplacera x par $x + \frac{1}{2}$; l'équation devient

$$x^3 - \frac{5}{8}x - \frac{5}{16} = 0.$$

La condition de réalité n'est pas satisfaite, ainsi l'équation proposée n'a qu'une racine réelle.

Équations d'un degré quelconque.

189. La méthode, dont nous venons de faire usage pour calculer avec une approximation plus ou moins grande les racines d'une équation du troisième degré, s'applique aux équations d'un degré quelconque. Après avoir substitué les nombres entiers, on partagera en dix parties égales

les intervalles dans lesquels se trouvent les racines, puis en dix parties égales les nouveaux intervalles et ainsi de suite.

Nous allons établir les formules générales au moyen desquelles on peut des anciennes différences déduire les nouvelles. Soient h et h' les racines des deux progressions arithmétiques, k leur rapport $\frac{h'}{h}$; nous désignons par Δ les différences qui se rapportent à la première raison h , par δ celles qui se rapportent à la nouvelle raison h' . La fonction entière du degré m peut être considérée comme déterminée, soit par les valeurs qui correspondent à $m + 1$ termes

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + mh$$

de la première progression, soit par celles qui correspondent à $m + 1$ termes

$$x_0, x_0 + h', x_0 + 2h', \dots, x_0 + mh'$$

de la seconde; elle sera donc représentée par l'une ou l'autre des deux formules

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \dots \\ &\dots + \frac{x-x_0}{h} \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - m + 1 \right) \frac{\Delta^m u_0}{1.2 \dots m} \\ u &= u_0 + \frac{x-x_0}{h'} \delta u_0 + \frac{x-x_0}{h'} \left(\frac{x-x_0}{h'} - 1 \right) \frac{\delta^2 u_0}{1.2} \dots \\ &\dots + \frac{x-x_0}{h'} \dots \left(\frac{x-x_0}{h'} - m + 1 \right) \frac{\delta^m u_0}{1.2 \dots m}. \end{aligned}$$

Si l'on pose pour abrégier $\frac{x-x_0}{h} = z$, d'où $\frac{x-x_0}{h'} = \frac{z}{k}$, ces deux formules deviennent

$$(1) \quad u = u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \dots + z(z-1) \dots (z-m+1) \frac{\Delta^m u_0}{1.2 \dots m},$$

$$(2) \quad u = u_0 + \frac{z}{k} \delta u_0 + \frac{z}{k} \left(\frac{z}{k} - 1 \right) \frac{\delta^2 u_0}{1.2} \dots + \frac{z}{k} \left(\frac{z}{k} - 1 \right) \dots \left(\frac{z}{k} - m + 1 \right) \frac{\delta^m u_0}{1.2 \dots m}.$$

Ces deux expressions représentant le même polynôme, si on les ordonne par rapport aux puissances de la variable z , les coefficients des mêmes puissances de z doivent être égaux de part et d'autre; en égalant ces coefficients, on obtiendra des relations entre les anciennes différences et les nouvelles, qui permettront de calculer ces dernières au moyen des premières.

190. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une équation du quatrième degré; les formules (1) et (2) se réduisent à

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + z(z-1)(z-2) \frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ &\quad + z(z-1)(z-2)(z-3) \frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4}, \\ u &= u_0 + \frac{z}{k} \delta u_0 + \frac{z}{k} \left(\frac{z}{k} - 1 \right) \frac{\delta^2 u_0}{1.2} + \frac{z}{k} \left(\frac{z}{k} - 1 \right) \left(\frac{z}{k} - 2 \right) \frac{\delta^3 u_0}{1.2.3} \\ &\quad + \frac{z}{k} \left(\frac{z}{k} - 1 \right) \left(\frac{z}{k} - 2 \right) \left(\frac{z}{k} - 3 \right) \frac{\delta^4 u_0}{1.2.3.4}. \end{aligned}$$

L'identification donne les relations

$$\begin{aligned}\delta^4 &= k^4 \Delta^4, \\ \delta^3 - \frac{3}{2} \delta^4 &= k^3 \left(\Delta^3 - \frac{3}{2} \Delta^4 \right), \\ \delta^2 - \delta^3 + \frac{11}{12} \delta^4 &= k^2 \left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 \right), \\ \frac{\delta}{1} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} &= k \left(\frac{\Delta}{1} - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} \right).\end{aligned}$$

Ces équations sont du premier degré; la première donnera δ^4 ; la seconde δ^3 , etc.

191. EXEMPLE VII. Appliquons à l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0.$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-2	1	- 14	50	- 42	24
-1	- 13	+ 16	- 12	- 18	24
0	+ 3	+ 4	- 30	6	24
1	+ 7	- 26	- 24	30	24
2	- 19	- 50	6	54	24
3	- 69	- 44	60	78	24
4	- 113	+ 16	138	102	24
5	- 97	+ 154	240	126	24
6	+ 57	394	366	150	24

montre que l'équation a deux racines positives : une entre 1 et 2, une autre entre 5 et 6; comme elle ne présente que deux variations, elle n'a pas d'autre racine positive.

Pour obtenir ces deux racines à moins d'un dixième, nous partagerons chacun des deux intervalles en dix par-

ties égales, et nous calculerons les nouvelles différences au moyen des formules précédentes.

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1,0	7,0000	—1,1609	—3246	—24	—24
1,1	5,8391	—1,4855	—3270	0	24
1,2	4,3536	—1,8125	—3270	24	
1,3	2,5411	—2,1395	—3246		
1,4	0,4016	—2,4641			
1,5	—2,0625				

La première racine est comprise entre 1,4 et 1,5.

La seconde étant plus près de 6 que de 5, nous effectuons le calcul en remontant.

5,7	—19,2949	19,9045	2,1570	1104	24
5,8	10,6096	22,0615	2,2674	1128	24
5,9	32,6711	24,3289	2,3802	1152	24
6,0	57,0000	26,7091	2,4954	1176	24
		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4

Cette seconde racine est comprise entre 5,7 et 5,8.

L'équation proposée a d'ailleurs deux racines négatives : une comprise entre 0 et — 1, l'autre entre — 1 et — 2. On la calculerait de la même manière.

192. EXEMPLE VIII. Appliquons encore à l'équation du quatrième degré

$$f(x) = 8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0.$$

La transformée en $-x$ n'ayant pas de variation, l'équa-

tion n'a pas de racine négative : elle peut avoir 0, ou 2, ou 4 racines positives. La substitution des nombres entiers positifs

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
— 1	194	— 145	130	— 144	192
0	49	— 15	— 14	48	192
1	34	— 29	34	240	192
2	5	5	274	432	192
3	10				

ne présente pas de variation. L'équation

$$f'(x) = 32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0$$

n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 2 et 3. On en conclut que l'équation proposée ne pourra avoir au plus que deux racines réelles positives et, si elles existent, elles seront comprises entre 2 et 3. On partagera donc cet intervalle en dix parties égales.

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2,0	5,0000	— 3,4852	3352	1728	192
2,1	1,5148	— 3,1500	5080	1920	192
2,2	— 1,6352	— 2,6420	7000	2112	192
2,3	— 4,2772	— 1,9420	9112	2304	192
2,4	— 6,2192	— 1,0308	11,1416	2496	192
2,5	— 7,2500	0,1108	1,3912	2688	192
2,6	— 7,1392	1,5020	1,6600	2880	192
2,7	— 5,6372	3,1620	1,9480	3072	
2,8	— 2,4752	5,1100	1,2552		
2,9	2,6348	7,3652			
3,0	10,0000				

Ainsi l'équation a deux racines réelles positives, comprises, l'une entre 2,1 et 2,2, l'autre entre 2,8 et 2,9.

RECHERCHE DES RACINES D'UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE.

LORSQU'ON A SUBSTITUÉ DES NOMBRES ÉQUIDISTANTS ET ASSEZ VOISINS POUR QUE LES DIFFÉRENCES DES RÉSULTATS PUISSENT ÊTRE CONSIDÉRÉS COMME ÉGALES À PARTIR D'UN CERTAIN ORDRE, ON CONTINUE L'OPÉRATION COMME S'IL S'AGISSAIT D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE.

193. EXEMPLE IX. Soit l'équation

$$10^x = 257x.$$

Si l'on prend les logarithmes vulgaires des deux membres, cette équation devient

$$f(x) = x - (\log x + \log 257) = x - (\log x + 2,40995512) = 0.$$

Substituons d'abord à la variable x les nombres entiers 0, 1, 2, 3, ..., en nous bornant à reconnaître le signe de $f(x)$ sans faire de calcul. Pour $x=0$, $\log x = -\infty$; donc $f(x) = +\infty$. Pour $x=1$, $\log 1 = 0$, $f(1) < 0$. Ainsi il y a une première racine comprise entre 0 et 1. Pour $x=2$, la parenthèse étant supérieure à 2, on aura encore évidemment $f(2) < 0$. Si l'on ajoute le logarithme de 3, qui est 0,477, au nombre constant 2,409, on voit de suite que l'on aura un résultat plus petit que 3; donc $f(3) > 0$. Ainsi il y a une seconde racine entre 2 et 3. L'équation proposée n'a pas d'autre racine réelle, car l'équation

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$$

n'a qu'une racine $x = 1$.

Proposons de calculer la racine comprise entre 2 et 5, d'abord à un dixième. On substituera à x les valeurs successives 2,1, 2,2, ... Mais on peut diminuer beaucoup le nombre des substitutions. Le logarithme de 2,1 est 0,322; ajouté à 2,409, il donne 2,73; il en résulte que $x = 2,7$ donnera encore un résultat négatif. Il suffit de lire les deux premiers chiffres des logarithmes de 2,8 et de 2,9 pour voir que $x = 2,8$ donnera un résultat négatif, 2,9 un résultat positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,8 et 2,9.

Cherchons-la maintenant à un centième. Le logarithme de 2,81 ajoutée à 2,409 donne 2,85; il en résulte que 2,85 donnera encore un résultat négatif. Essayons 2,86; le logarithme de 2,86 ajouté à 2,409, donne 2,866; le résultat est négatif. Le logarithme de 2,87 ajouté à 2,409 donne 2,867; le résultat est positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,86 et 2,87.

Calculons-la à un millième. Le logarithme de 2,861 ajouté à 2,4099 donne 2,866; on en conclut que 2,86 donne encore un résultat négatif. On essayera 2,867 et 2,868; le premier donne un résultat négatif, le second un résultat positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,867 et 2,868. On continuerait de la même manière avec une égale facilité.

194. EXEMPLE X. Résoudre l'équation

$$e^x = 10x,$$

ou

$$x - (Lx + L10) = x - (Lx + 2,50258 \dots) = 0.$$

On se servira de la table des logarithmes népériens ou hyperboliques qui, dans les tables de Callet, suit la table des logarithmes vulgaires. En substituant les nombres en-

tiers, on reconnaît, comme dans l'exemple précédent, que l'équation a deux racines réelles, et comprises, l'une entre 0 et 1, l'autre entre 5 et 4.

Proposons-nous de calculer cette dernière à un dixième près. Si l'on pose $x = \frac{x'}{10}$, l'équation devient

$$x' - 10Lx' = 0,$$

et la question revient à calculer à une unité près la racine de cette dernière équation comprise entre 50 et 40. En suivant des yeux la table des logarithmes hyperboliques de 50 à 40 et déplaçant par la pensée la virgule d'un rang vers la droite, on voit que le résultat reste négatif jusqu'à $x' = 35$, et qu'il devient positif pour $x' = 36$. Donc la racine est comprise entre 5,5 et 5,6.

Pour la calculer à un centième près, on posera $x' = \frac{x''}{10}$; l'équation devient

$$x'' + 100L10 - 100Lx'' = x'' + 250,258, \dots - 100Lx'' = 0.$$

et l'on essayera entre 350 et 360. Comme $100L351 = 586,078$, on voit que le résultat sera encore négatif pour $x = 355$. Puisque $100L356 = 587,49$, le résultat sera encore négatif pour $x = 357$. Mais $x = 358$ donne un résultat positif. Donc la racine est comprise entre 5,57 et 5,58.

195. EXEMPLE XI. Soit l'équation

$$e^x - e^{-x} = ax,$$

que l'on a à résoudre dans le problème de la chaînette, c'est-à-dire lorsque l'on cherche la forme d'équilibre d'une chaîne pesante. Prenons $a = 12,54$.

Si l'on pose $y = e^x$, $z = e^{-x}$, l'équation s'écrit

$$u = y - z - 12,54 \times x = 0,$$

et l'on calculera y et z par les formules

$$\log y = x \log e = 0,43429448 \times x,$$

$$\log z = -\log y;$$

On remarque que $\log e$ est le module M des logarithmes vulgaires.

L'équation est vérifiée par $x = 0$; mais elle admet, en outre, une racine positive que nous nous proposons de déterminer. La valeur $x = 1$ donne évidemment un résultat négatif. Pour $x = 2$, on a $y < 9$, et par conséquent $u < 0$. Si l'on fait le calcul pour les nombres suivants, on trouve

$$x = 3, y = 10, u = -27,$$

$$x = 4, y = 55, u = +5,$$

La racine est comprise entre 3 et 4, et elle est beaucoup plus près de 4 que de 3. Dans ces premiers calculs, on peut négliger z et les décimales.

Essayons en rétrogradant :

$$x = 3,9, y = 49,402, z = 0,020, u = 0,476$$

$$x = 3,8, y = 44,701, z = 0,022, u = -2,973.$$

La racine est comprise entre 3,8 et 3,9, et elle est beaucoup plus près de 3,9 que de 3,8. On partagera de même cet intervalle en dix parties égales :

$$x = 3,89, y = 48,9109, z = 0,0204, u = 0,1089,$$

$$x = 3,88, y = 48,4242, z = 0,0207, u = -0,2416.$$

La racine est comprise entre 3,88 et 3,89.

Partageons cet intervalle en dix parties égales et essayons encore en rétrogradant :

$$x = 3,889, y = 48,86200, z = 0,02047, u = 0,07347$$

$$x = 3,888, y = 48,81316, z = 0,02049, u = 0,05715$$

$$x = 3,887, y = 48,76437, z = 0,02051, u = 0,00086$$

$$x = 3,886, y = 48,71557, z = 0,02053, u = -0,05540.$$

Pour effectuer rapidement les calculs, il faut avoir soin de construire d'avance des tables contenant les produits du module M et du nombre 12,54 par les neuf premiers nombres. La racine est comprise entre 3,886 et 3,887.

Si l'on prend les différences des valeurs de la fonction, on voit que les différences secondes sont constantes.

x	u	Δ	Δ^2
3,886	-0,05540	3626	3
3,887	0,00086	3629	3
3,888	0,05715	3632	
3,889	0,07347		

Ainsi on pourra continuer le calcul comme s'il s'agissait d'une équation du second degré; mais nous reviendrons plus tard à cette question.

196. EXEMPLE XII. La détermination du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil se ramène à la résolution de l'équation

$$u - e \sin u = \zeta,$$

dans laquelle la lettre ζ désigne un angle donné, u un angle cherché, e l'excentricité de l'orbite divisée par $\sin 1''$,

Quand on obtient cette équation, ζ et u désignent des longueurs d'arcs, e l'excentricité : on la transforme en changeant les arcs en angles. Soit x le nombre qui mesure la longueur d'un arc, le rayon étant pris pour unité; on sait que, dans la construction des tables trigonométriques, la longueur de l'arc d'une seconde a été prise pour le sinus de l'angle d'une seconde; le quotient $\frac{x}{\sin 1''}$ exprimera donc combien l'angle qui correspond à l'arc x contient de fois l'angle d'une seconde. Ainsi, pour transformer un arc en angle, l'angle de $1''$ étant pris pour unité, il suffit de le diviser par $\sin 1''$. Si donc on divise par $\sin 1''$ tous les termes de l'équation

$$u - e \sin u = \zeta,$$

on obtient l'équation

$$\frac{u}{\sin 1''} - \frac{e}{\sin 1''} \sin u = \frac{\zeta}{\sin 1''}.$$

Quand il s'agit des planètes dont les orbites ont, en général, des excentricités très-petites, on peut résoudre l'équation par la méthode des approximations successives. Écrivons, en effet, l'équation sous la forme

$$u = \zeta + e \sin u.$$

En négligeant le second terme du second membre, on a une première valeur approchée

$$u_0 = \zeta.$$

Substituant cette valeur dans le second membre, on a une seconde valeur

$$u_1 = \zeta + e \sin \zeta.$$

plus approchée que la première. Substituant cette seconde

valeur approchée dans le second membre, on a une troisième valeur encore plus approchée

$$u_2 = \zeta + e \sin u_1,$$

et ainsi de suite.

Prenons $\zeta = 62^\circ 28' 54''{,}6$ et l'excentricité $0{,}01679226$ de l'orbite terrestre. On cherche d'abord

$$\log e = \frac{\log 0{,}01679226}{\log \sin 1''} = 3{,}5395343,$$

qui servira dans tout le cours du calcul. Calculons par logarithmes la première correction $e \sin \zeta$:

$$\log e = 3{,}5395343$$

$$\log \sin \zeta = 1{,}9478572$$

$$\log 0^\circ 51' 11''{,}8 \dots = 3{,}4875915$$

$$e \sin \zeta = 0^\circ 51' 11''{,}8; u_1 = 63^\circ 20' 0''{,}4.$$

Calculons de même la seconde correction $e \sin u_1 - e \sin \zeta$:

$$\log e = 3{,}5395343$$

$$\log \sin u_1 = 1{,}9511658$$

$$\log 0^\circ 51' 35''{,}3 \dots = 3{,}4907001$$

$$e \sin u_1 - e \sin \zeta = 23''{,}5; u_2 = 63^\circ 20' 29''{,}9.$$

Calculons ensuite la troisième correction $e \sin u_2 - e \sin u_1$:

$$\log e = 3{,}5395343$$

$$\log \sin u_2 = 1{,}9511906$$

$$\log 0^\circ 51' 35''{,}5 \dots = 3{,}4907249$$

$$e \sin u_2 - e \sin u_1 = 0''{,}2; u_3 = 63^\circ 20' 30''{,}1.$$

On voit que les corrections deviennent de plus en plus petites; la correction suivante n'aurait pas d'influence sur

les dixièmes de seconde. Le calcul se fait très-rapidement, parce qu'on se sert toujours de la même partie des tables.

AYANT OBTENU, AVEC UN CERTAIN DEGRÉ D'APPROXIMATION, UNE RACINE D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE OU TRANSCENDANTE, EN APPROCHER D'AVANTAGE PAR LA MÉTHODE DE NEWTON. — USAGE DES CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES, POUR L'APPLICATION DE CETTE MÉTHODE.

Méthode par interpolation.

197. Quand on a obtenu une racine d'une équation avec un certain degré d'approximation, on peut en déduire aisément une valeur beaucoup plus approchée. La méthode la plus simple est celle d'interpolation. Soit $u = f(x)$ le premier membre de l'équation, on a trouvé deux valeurs x_0 et $x_0 + h$ qui comprennent une racine. Reprenons la formule (C) du n° 179

$$u = u_0 + \frac{z}{1} \Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots$$

obtenue en posant $\frac{x-x_0}{h} = z$. Nous cherchons la valeur de x ou de z qui annule la fonction; nous aurons donc pour déterminer z l'équation

$$(1) \quad 0 = u_0 + z \Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots$$

que l'on résoudra par approximations successives. En effet, la raison h étant très-petite, les différences successives diminuent très-rapidement; si l'on néglige les différences d'un ordre supérieur au premier, l'équation se réduit à

$$u_0 + z \Delta u_0 = 0,$$

d'où l'on déduit la valeur approchée

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

L'équation (1) étant mise sous la forme

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \left[\frac{z(z-1)}{1.2} \frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0} + \dots \right],$$

si l'on remplace dans la parenthèse z par la valeur approchée que nous venons de trouver, on obtiendra une seconde valeur plus approchée que la précédente, et ainsi de suite.

Méthode de Newton.

198. Posons $x = x_0 + \alpha$, α étant plus petit que h , et développons $f(x_0 + \alpha)$ suivant la loi connue,

$$f(x_0 + \alpha) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{\alpha}{1} + f''(x_0) \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots;$$

nous aurons pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$(2) \quad 0 = f(x_0) + f'(x_0) \alpha + f''(x_0) \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots$$

L'inconnue α étant une quantité très-petite, on pourra négliger les puissances supérieures à la première, ce qui réduit l'équation à

$$f(x_0) + \alpha f'(x_0) = 0;$$

on en déduit la valeur approximative

$$\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \alpha^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2.3f'(x_0)}\alpha + \dots \right].$$

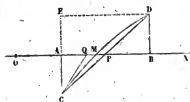
Les termes de la parenthèse étant très-petits à partir du second, l'erreur commise est à peu près égale à $\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}\alpha^2$, la quantité $\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$ est ordinairement plus petite que l'unité et par conséquent l'erreur commise moindre que α^2 . Ainsi l'application de cette méthode double en général le nombre des chiffres décimaux exacts; par exemple, si h est moindre que 0,001, l'erreur commise sera en général moindre que 0,000001; on connaissait la racine avec trois chiffres décimaux exacts; on l'a maintenant avec six chiffres décimaux. On peut répéter l'opération plusieurs fois, en se servant de la valeur donnée par une première opération pour en déduire une valeur encore plus approchée, etc.

Emploi simultané des deux méthodes.

199. Il est très-avantageux d'employer simultanément les deux méthodes, de manière à ce que l'une donne un résultat trop petit, l'autre un résultat trop grand; la valeur exacte de la racine étant alors comprise entre les deux, on sait au juste l'approximation sur laquelle on peut compter.

Représentons par deux ordonnées AC et BD les valeurs de signes contraires du polynôme pour $x = x_0$ et $x = x_0 + h$, et traçons la courbe du point C au point D. Cette courbe coupe l'axe OX en un point M qu'il s'agit de déterminer. Nous allons faire voir que la méthode d'interpolation par parties proportionnelles consiste à remplacer l'arc de

courbe CMD par la corde CD; tandis que la méthode de



Newton revient à mener la tangente CQ au point C.

En effet, par le point D traçons une parallèle DE à l'axe OX; on a Δu_0

$= BD + AC = CE$; les triangles semblables ACP, CED, donnent

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CA}{CE},$$

d'où

$$z = \frac{AP}{h} = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

Car, la quantité $\frac{AP}{h}$ est ce que nous avons appelé z .

D'autre part, on sait que la tangente trigonométrique de l'angle CQX que fait la tangente à la courbe avec l'axe OX est égale à $f'(x_0)$. Le triangle rectangle CAQ donne

$$AQ = AC, \cot CQA = \frac{AC}{\tan CQA};$$

on a donc

$$AQ = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si nous appelons z' le rapport $\frac{AQ}{h}$, nous aurons

$$z' = \frac{AQ}{h} = -\frac{u_0}{hf'(x_0)}.$$

Ceci revient à prendre pour unité l'intervalle h .

On voit sur la figure que le point M est situé entre les

points P et Q, et par conséquent que la vraie valeur OM de la racine est comprise entre les deux valeurs approchées OP et OQ. En d'autres termes l'une des corrections est trop grande, l'autre trop petite.

200. Appliquons à l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$$

dont nous avons calculé la plus petite racine positive à un millième près (n° 184). Supposons d'abord que nous n'ayons pas été plus loin que les dixièmes par les différences; nous aurons les deux corrections

$$z = \frac{0,197}{1,453} = 0,1355 \dots$$

$$z' = \frac{0,197}{1,493} = 0,1319 \dots$$

Nous remarquons que, lorsqu'il s'agit d'une équation du troisième degré, le second diviseur $hf'(x_0)$ se déduit très-facilement du tableau des différences, comme nous l'avons fait remarquer au n° 185; de la différence première — 1,453, il suffit de retrancher la moitié de la différence seconde antérieure, 0,078 et le sixième de la différence troisième 0,006. Nous avons ainsi deux valeurs approchées z et z' , la première par excès, le seconde par défaut; si l'on prend la moyenne

$$\frac{z + z'}{2} = 0,1337 \dots$$

il est aisé de voir que l'erreur commise est moindre que la demi-différence

$$\frac{z - z'}{2} = 0,0018 \dots$$

En effet, si l'on appelle Z la valeur exacte de la correction, ϵ et ϵ' les erreurs; on a

$$\begin{aligned} z &= Z + \epsilon, \\ z' &= Z - \epsilon'; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{z + z'}{2} = Z + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2}, \quad \frac{z - z'}{2} = \frac{\epsilon + \epsilon'}{2}.$$

Ainsi la différence entre la vraie valeur Z et la moyenne $\frac{z+z'}{2}$ est moindre que $\frac{z-z'}{2}$. Nous adopterons ainsi la valeur

$$Z = 0,13$$

approchée par défaut. Dans le calcul précédent, nous avons pris le dixième pour unité; la correction est donc 0,013 et nous avons la première racine 0,513 avec trois chiffres décimaux exacts, par défaut.

Nous avons poussé le calcul de cette première racine jusqu'aux millièmes par les différences. Si l'on applique alors les deux modes de correction, on trouve

$$z = \frac{3571297}{14824153} = 0,24097 \dots$$

$$z' = \frac{3571297}{14828093} = 0,24085 \dots$$

on prendra

$$Z = 0,2409,$$

ce qui donne la racine 0,5132409 avec sept décimales exactes.

201. Nous avons supposé dans ce qui précède que x_0 est une valeur de la racine approchée par défaut; les mêmes raisonnements et les mêmes formules s'appliquent au cas où elle est approchée par excès; il suffit de rendre k négatif.

tive. Pour effectuer la correction, on partira de la valeur que l'on présume être la plus approchée.

Appliquons à l'équation du troisième degré

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

dont nous avons calculé les deux racines positives à un centième près (n° 185). Pour la première, nous partirons de la limite supérieure 1,36 faisant $h = -0,01$; nous aurons

$$z = -\frac{4544}{14919} = -0,305 \dots \dots$$

$$z' = -\frac{4544}{14512} = -0,313 \dots \dots ;$$

on prendra $Z = -0,31$, ce qui donne la première racine 1,3569 avec quatre chiffres décimaux exacts. Pour la seconde, on partira au contraire de la limite inférieure 1,69.

Appliquons à l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 5 = 0,$$

dont nous avons calculé les racines positives à un dixième près (n° 191). Pour la première, nous partirons de la limite inférieure 1,4.

$$z = \frac{0,4016}{2,4641} = 0,163 \dots \dots$$

$$z' = \frac{0,4016}{2,3024} = 0,174 \dots \dots$$

$$Z = 0,17, \quad x = 1,417.$$

202. Nous avons calculé la racine de l'équation transcendante

$$e^x - e^{-x} - 12,54x = 0$$

à un millième près (n° 195), et nous avons trouvé qu'elle est comprise entre 3,886 et 3,887, mais plus rapprochée de ce dernier nombre que du premier. Nous avons vu que la différence seconde est constante au degré d'approximation où l'on peut aller avec les tables ordinaires de logarithmes. On aura donc, pour effectuer la correction, l'équation du second degré

$$0 = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 u_0,$$

d'où

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \frac{z(z-1)}{2} \frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}.$$

Une première valeur approchée de z est

$$z = \frac{3540}{3626} = 0,97628 \dots$$

La correction $\frac{z(z-1)}{2} \frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}$ est moindre que $\frac{1}{10^4}$; ainsi on aura la racine avec sept décimales exactes

$$x = 3,8869763.$$

Exercices :

QUESTION I. Partager un hémisphère en deux parties égales par un plan parallèle à la base de l'hémisphère. On calculera l'inconnue à moins d'un millième en prenant le rayon de la sphère pour unité.

QUESTION II. Déterminer les dimensions d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit dont on connaît la surface totale et le volume. — On fera une application numérique.

QUESTION III. Déterminer les arêtes d'un parallépipède

rectangle, connaissant la diagonale, la surface totale et le volume.

QUESTION IV. Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit, et le volume qu'engendre le triangle en tournant autour de l'hypoténuse.

QUESTION V. Calculer à moins d'un millième près la plus petite racine positive de l'équation $x \operatorname{tang.} x = 1$.

QUESTION VI. On a trouvé, pour l'écoulement des eaux dans les tuyaux de conduite, la formule empirique

$$Q = 21,045 \sqrt{D^5 j} - 0,0196 D^3,$$

dans laquelle D représente le diamètre du tuyau en mètre, j la pente par mètre, Q la dépense par seconde en mètres cubes. Calculer le diamètre qu'il faut donner à un tuyau pour que sous une pente donnée il fournisse une quantité d'eau déterminée. — On emploiera la méthode des approximations successives à cause de la petitesse du second coefficient.

CHAPITRE IX.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

TOUTE FRACTION RATIONNELLE $\frac{F(x)}{f(x)}$ EST DÉCOMPOSABLE EN
UNE PARTIE ENTIÈRE ET EN DIVERSES FRACTIONS SIMPLES.
— LA DÉCOMPOSITION NE PEUT SE FAIRE QUE D'UNE SEULE
MANIÈRE. — MOYENS DE L'EFFECTUER QUAND ON CONNAÎT
LES FACTEURS BINÔMES QUI DIVISENT LE DÉNOMINATEUR $f(x)$.

203. On appelle *fraction rationnelle* une fraction algébrique dont les deux termes sont des polynômes entiers d'une même lettre x . Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction de cette forme.

Nous pouvons toujours supposer cette fraction irréductible ; car, si les deux polynômes avaient des facteurs binômes communs, on les supprimerait. Lorsque le numérateur sera d'un degré plus élevé que le dénominateur, on effectuera la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x , ce qui donnera un quotient entier et une fraction ayant son numérateur d'un degré moins élevé que

le dénominateur. Laissant de côté cette partie entière, nous avons à considérer une fraction irréductible $\frac{F(x)}{f(x)}$ dont le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur. Nous désignerons par m le degré du dénominateur, le numérateur étant au plus du degré $m-1$.

Cas des racines inégales.

204. Supposons d'abord que l'équation $f(x) = 0$ n'ait pas de racines égales. J'appelle $a, b, c, \dots, h, k$, les m racines de cette équation, et je pose

$$f(x) = (x-a)f_1(x)$$

Je remplace x par $a + (x-a)$, et, regardant $x-a$ comme un accroissement, je développe les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x) = F(a + \overline{x-a}) = F(a) + F'(a) \frac{x-a}{1} + \dots,$$

$$f_1(x) = f_1(a + \overline{x-a}) = f_1(a) + f_1'(a) \frac{x-a}{1} + \dots$$

Je divise le premier polynôme par le second, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de $x-a$; le premier terme du quotient est $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; j'appelle A ce premier terme; en multipliant le diviseur par A et retranchant le produit du dividende, on a un reste qui ne contient plus de terme constant; si l'on met $x-a$ en facteur commun, ce reste peut être représenté par $(x-a)F_1(x)$. Du dividende, qui est au plus du degré $m-1$, on retranche le produit $Af_1(x)$ qui est du degré $m-1$, et l'on

met $x - a$ en facteur, le polynôme $F_1(x)$ est donc au plus du degré $m - 2$. J'arrête la division à ce premier terme; le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on a

$$(1) \quad F(x) = Af_1(x) + (x - a)F_1(x).$$

En divisant les deux membres par $f(x)$ ou par $(x - a)f_1(x)$, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi la fraction proposée est égale à une première fraction simple $\frac{A}{x - a}$, plus une fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ de même forme que la première, mais d'un degré moins élevé. Le dénominateur $f_1(x)$ est en effet du degré $m - 1$, le numérateur $F_1(x)$ au plus du degré $m - 2$. Cette nouvelle fraction est d'ailleurs irréductible comme la proposée; car si les deux termes avaient un facteur binôme commun, ce ne pourrait être que l'un des facteurs de $f_1(x)$, par exemple $x - b$; ce facteur, divisant les deux parties qui composent le second membre de l'équation (1), diviserait leur somme $F(x)$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé qu'aucun des facteurs de $f(x)$ ne divise $F(x)$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la fraction $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$. Si l'on pose $f_1(x) = (x - b)f_2(x)$, on aura

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x - b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)};$$

la nouvelle fraction $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ est aussi irréductible, son dé-

numérateur du degré $m - 2$, son numérateur au plus du degré $m - 3$.

De même

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C}{x - c} + \frac{F_3(x)}{f_3(x)};$$

en continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fraction du premier degré

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)} = \frac{K}{x - k}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les fractions intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \dots + \frac{K}{x - k}.$$

Ainsi la fraction rationnelle est décomposable en une somme de fractions simples, ayant respectivement pour dénominateurs les facteurs simples qui composent le dénominateur de la fraction proposée et pour numérateurs des constantes.

205. Je dis maintenant que la fraction proposée n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples. On démontre, en effet, que deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \dots + \frac{K}{x - k},$$

$$\frac{A'}{x - a'} + \frac{B'}{x - b'} \dots + \frac{K'}{x - k'},$$

égaux pour toutes les valeurs de x , sont identiques. Multiplions par $x - a$, il vient

$$\begin{aligned} & A + (x - a) \left[\frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} \dots \right] \\ &= (x - a) \left[\frac{A'}{x - a'} + \frac{B'}{x - b'} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Si l'on fait $x = a$, le premier membre se réduit à A , tandis que le second membre s'évanouit; il faut donc que l'un des dénominateurs du second système soit égal à $x - a$; supposons, par exemple, $a' = a$; alors on a

$$\begin{aligned} & A + (x - a) \left[\frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} \dots \right] \\ &= A' + (x - a) \left[\frac{B'}{x - b'} + \frac{C'}{x - c'} \dots \right], \end{aligned}$$

et si l'on fait $x = a$, on en déduit $A' = A$. Ainsi la fraction $\frac{A}{x - a}$ du premier système fait partie du second. Supprimons ces deux fractions égales, il reste deux systèmes égaux

$$\frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} \dots = \frac{B'}{x - b'} + \frac{C'}{x - c'} \dots$$

On démontrerait de même que la fraction $\frac{B}{x - b}$ du premier appartient au second, et ainsi de suite. Alors les deux systèmes sont identiques.

206 CALCUL DES NUMÉRATEURS. Nous avons trouvé

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Le premier numérateur A est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x - a} \right)}$$

quand on y fait $x = a$.

De même le second numérateur B est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)},$$

quand on y fait $x = b$, etc.

On peut aussi calculer ces constantes au moyen de la dérivée de la fonction $f(x)$. En effet, nous avons posé

$$f(x) = (x-a)f_1(x);$$

si l'on prend les dérivées des deux membres, il vient

$$f'(x) = f_1(x) + (x-a)f_1'(x),$$

et, en faisant $x = a$,

$$f(a) = f_1(a).$$

On en déduit

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

On aura de même

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \quad \dots$$

Ainsi les numérateurs des fractions simples sont les diverses valeurs que prend la fraction $\frac{F(x)}{f'(x)}$, quand on y remplace successivement x par chacune des racines $a, b, \dots, k$ de l'équation $f(x) = 0$.

Exemples.

1° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 + 5x - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}.$$

En résolvant l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

on obtient les quatre racines simples 0, 1, -1, -2. Ainsi la fraction rationnelle se décomposera en quatre fractions simples de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}.$$

Pour calculer les numérateurs, nous nous servirons de la dérivée

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2,$$

ce qui donne

$$A = \frac{F(0)}{f'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$B = \frac{F(1)}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{-5}{2}$$

$$D = \frac{F(-2)}{f'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} - \frac{\frac{5}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$

2° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

La fraction proposée se décomposera de la manière suivante :

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

On peut déterminer les constantes immédiatement et sans l'aide d'aucune formule par la méthode des *coefficients indéterminés*. Si l'on multiplie par le dénominateur, l'égalité précédente devient

$$x^2 + 1 = A(x-1)(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-2)(x-3) \\ + C(x+1)(x-1)(x-3) + D(x+1)(x-1)(x-2).$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x . Faisons x successivement égal à chacune des racines simples $-1, 1, 2, 3$, tous les termes du second membre s'évanouissent, excepté un, et l'on a les relations

$$2 = -24A, \quad 2 = 4B, \quad 5 = -3C, \quad 10 = 8D.$$

d'où l'on déduit les valeurs des constantes

$$A = -\frac{1}{12}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = \frac{5}{4}.$$

Cas des racines égales.

207. Supposons que a soit une racine de l'équation $f(x) = 0$ d'un ordre n de multiplicité. Nous poserons

$$f(x) = (x-a)^n f_1(x),$$

et après avoir développé comme précédemment les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x) = F(a + x - a) = F(a) + F'(a) \frac{x-a}{1} + \dots,$$

$$f_1(x) = f_1(a + x - a) = f_1(a) + f_1'(a) \frac{x-a}{1} + \dots,$$

nous effectuerons la division du premier par le second,

ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de $x-a$ et poussant l'opération jusqu'au terme du degré $n-1$; représentons ce quotient par

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-1},$$

le reste de la division contenant à tous ses termes le facteur $(x-a)^n$ peut être mis sous la forme $(x-a)^n F_1(x)$. On a ainsi

$$F(x) = [A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-1}] f_1(x) + (x-a)^n F_1(x).$$

Le diviseur étant du degré $m-n$, et le quotient du degré $n-1$, le produit du diviseur par le quotient est du degré $m-1$, et comme le dividende est au plus du degré $m-1$, la différence ou le reste de la division sera au plus du degré $m-1$; puisqu'on a mis $(x-a)^n$ en facteur, il en résulte que le polynôme $F_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. Il est évident, d'ailleurs, que les deux polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car, s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $f(x)$ et $F(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Divisons maintenant par $f(x)$ ou $(x-a)^n f_1(x)$ les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi le facteur multiple $(x-a)^n$ donne lieu à une série de n fractions simples, et nous avons encore à décomposer la fraction irréductible $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$; le numérateur au plus du degré $m-n-1$.

Supposons que l'équation $f(x) = 0$ contienne une seconde racine b d'un degré p de multiplicité; nous poserons $f_1(x) = (x-b)^p f_2(x)$, et nous aurons de même

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} \dots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)}.$$

S'il y a une troisième racine c d'ordre q , on aura encore

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C_0}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} \dots + \frac{C_{q-1}}{x-c} + \frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

S'il n'y a pas d'autre racine multiple, le polynôme $f_3(x)$ ne contenant plus que des facteurs simples, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)} = \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e} \dots + \frac{K}{x-k}.$$

En ajoutant toutes ces égalités, on trouve enfin

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &+ \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} \dots + \frac{B_{p-1}}{x-b} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{D}{x-d} \dots \dots \dots + \frac{K}{x-k}. \end{aligned}$$

A chaque racine multiple correspond un groupe de fractions simples. La première fraction de chaque groupe existe nécessairement, mais les autres peuvent manquer; en effet, quand on effectue la division des polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ ordonnés comme nous l'avons dit, les premiers termes $F(a)$ et $f_1(a)$ ne sont pas nuls, et par conséquent le premier terme $A_0 = \frac{F(a)}{f_1(a)}$ du quotient n'est ni nul ni infini; mais parmi les termes suivants, quelques-uns peuvent avoir des coefficients nuls.

208. Je dis maintenant que la fraction proposée n'est

décomposable qu'en un seul système de fractions simples.
Soient

$$\frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots,$$

$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}} + \frac{A'_1}{(x-a')^{n'-1}} + \dots + \frac{B'_0}{(x-b')^p} + \frac{B'_1}{(x-b')^{p-1}} + \dots,$$

deux systèmes égaux entre eux, quelle que soit la valeur de x . Multiplions les deux expressions par $(x-a)^n$ et faisons $x=a$, la première se réduit à A_0 , tandis que la seconde s'évanouit; donc l'un des dénominateurs du second système est égal à $(x-a)^n$, et l'on aura, par exemple, $a'=a$, $n'=n$. Mais alors l'égalité devient

$$A_0 + (x-a) \left[A_1 + \dots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \dots \right]$$

$$= A'_0 + (x-a) \left[A'_1 + \dots + \frac{B'_0}{(x-b')^p} + \dots \right],$$

et si l'on fait $x=a$, on en déduit $A_0=A'_0$. Ainsi la première fraction du premier système se retrouve dans le second. En supprimant ces deux fractions égales et recommençant le même raisonnement, on verrait que la seconde s'y trouve également, et ainsi de suite. Donc les deux systèmes sont identiques.

Exemple :

209. Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{4x^3 - 5x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Le dénominateur

$$f(x) = x^3(x-1)^2(x+1)$$

contenant un facteur triple, un facteur double et un facteur simple, la fraction proposée se développera en fractions simples de la forme suivante

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Calculons les trois constantes qui se rapportent au facteur triple x . Nous ordonnons par rapport aux puissances croissantes de x ,

$$F(x) = 2 - 5x + 4x^2,$$

$$f_1(x) = (x-1)^2(x+1) = 1 - x - x^2 + x^3,$$

et nous effectuons la division jusqu'à ce que nous arrivions au terme du second degré, en remarquant que dans ce calcul il est inutile d'écrire les termes d'un degré supérieur au second, ce qui abrège l'opération,

$$\begin{array}{r|l} 2-5x & 1-x-x^2 \\ -3x+2x^2 & \hline -x^2 & 2-5x-x^2 \end{array}$$

Puisque le quotient a été représenté par $A_0 + A_1x + A_2x^2$, on a

$$A_0 = 2, \quad A_1 = -3, \quad A_2 = -1.$$

Calculons maintenant les coefficients qui se rapportent au facteur double $x-1$. On peut supposer que l'on commence la décomposition par ce facteur. Nous développerons jusqu'au premier degré en négligeant les termes suivants

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1+x-1) = F(1) + F'(1)(x-1) + \dots = 1 + 7(x-1) + \dots \\ f_1(x) &= x^2(x+1) = x^2 + x^3 = f_1(1) + f_1'(1)(x-1) + \dots = 2 + 7(x-1) + \dots, \end{aligned}$$

et nous effectuerons la division

$$\begin{array}{l} 1 + 7(x-1) \\ + \frac{7}{2}(x-1) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 + 7(x-1) \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{4}(x-1) \end{array} \right.$$

Ce quotient a été représenté par $B_0 + B_1(x-1)$; on a donc

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Quant au coefficient C qui se rapporte au facteur simple $(x+1)$, on l'obtient par la règle ordinaire

$$C = \frac{F(-1)}{f'_1(-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

On a ainsi

$$\frac{4x^3 - 5x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-1} - \frac{\frac{3}{4}}{x+1}.$$

210. On peut employer aussi la méthode des coefficients intermédiaires. On a posé

$$\frac{4x^3 - 5x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned} 4x^3 - 5x + 2 &= (A_0 + A_1x + A_2x^2)(x-1)^2(x+1) \\ &+ [B_0 + B_1(x-1)]x^2(x+1) + Cx^2(x-1)^2. \end{aligned}$$

En donnant successivement à x les valeurs 0, 1, -1, on a

$$2 = A_0, \quad 1 = 2B_0, \quad 3 = -4C,$$

d'où

$$A_0 = 2, \quad B_0 = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{3}{4}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne

$$12x^2 - 5 = (A_1 + 2A_2x)(x-1)^2(x+1) + [A_0 + A_1x + A_2x^2][2(x-1)(x+1) + (x-1)^2] \\ + B_1x^2(x+1) + [B_0 + B_1(x-1)][3x^2(x+1) + x^3] \\ + 3Cx^2(x-1)^2 + 2Cx^3(x-1),$$

et dans cette dernière égalité, faisons $x=0$ et $x=1$, nous aurons

$$-5 = A_1 - A_0, \quad 7 = 2B_1 + 7B_0,$$

d'où
$$A_1 = -3, \quad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Il ne reste plus que la constante A_0 à déterminer; pour cela nous prendrons encore une fois la dérivée et nous y ferons $x=0$. Il suffit d'écrire les termes qui ne contiennent pas le facteur x ,

$$24x = 2A_2(x-1)^2(x+1) + 2A_1[2(x-1)(x+1) + (x-1)^2] \\ + A_0[2(x+1) + 4(x-1)] + \dots$$

Si l'on fait $x=0$, il vient

$$0 = 2A_2 - 2A_1 - 2A_0,$$

d'où
$$A_0 = -1.$$

Cas des racines imaginaires.

211. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$

est vraie d'une manière générale, quelles que soient les racines de l'équation $f(x)=0$, réelles ou imaginaires. Supposons que les deux polynômes qui composent la fraction proposée aient tous leurs coefficients réels; dans ce cas, si

l'équation admet une racine imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, elle admettra la racine conjuguée $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. A ces deux racines correspondent dans le développement des fractions simples de la forme

$$\frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}};$$

les numérateurs de ces deux fractions sont des quantités imaginaires conjuguées; car la seconde se déduit évidemment de la première par le changement du signe de $\sqrt{-1}$. Si l'on veut éviter les imaginaires dans la décomposition, il suffit d'ajouter ces deux fractions simples, ce qui donne

$$\frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{2A(x - \alpha) - 2B\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Ainsi, à un couple de racines simples imaginaires conjuguées correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q},$$

ayant son dénominateur du second degré et son numérateur du premier degré.

212. Nous avons supposé dans ce qui précède que les racines imaginaires conjuguées sont simples; supposons maintenant qu'elles soient d'un degré n de multiplicité, et pour abréger, représentons par $x^2 + px + q$ le produit $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ des deux facteurs binômes du premier degré. Nous allons démontrer que la partie qui, dans le développement, correspond à ces deux racines imaginaires conju-

guées d'ordre n , peut être ramenée à une somme de n fractions de la forme

$$\frac{M_0x + N_0}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} = \dots + \frac{M_{n-1}x + N_{n-1}}{x^2 + px + q},$$

dont les numérateurs sont réels et du premier degré.

Posons $f(x) = (x^2 + px + q)^n f_1(x)$. On peut disposer des deux constantes M_0 et N_0 de manière que le polynôme

$$(2) \quad F(x) - (M_0x + N_0)f_1(x)$$

soit divisible par $x^2 + px + q$. Il suffit pour cela que ce polynôme s'annule pour $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et pour $x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$; si nous remplaçons x par chacune de ces deux valeurs et si nous appelons $A \pm B\sqrt{-1}$ et $C \pm D\sqrt{-1}$ les valeurs correspondantes des fonctions $F(x)$ et $f_1(x)$, nous obtiendrons les deux relations

$$\begin{aligned} (A + B\sqrt{-1}) - [M_0(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + N_0](C + D\sqrt{-1}) &= 0, \\ (A - B\sqrt{-1}) - [M_0(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + N_0](C - D\sqrt{-1}) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\begin{aligned} (\beta D - \alpha C)M_0 - CN_0 &= -A, \\ (\beta C + \alpha D)M_0 + DN_0 &= B. \end{aligned}$$

Ces équations entre M_0 et N_0 sont du premier degré; le dénominateur commun des inconnues $\beta(C^2 + D^2)$ n'est pas nul; car si β était nulle, les racines ne seraient pas imaginaires; si $C^2 + D^2$ était nulle, le polynôme $f_1(x)$ contiendrait encore le facteur $x^2 + px + q$. On trouve ainsi pour M_0 et N_0 des valeurs réelles finies et déterminées.

Le polynôme (2) devenant de cette manière divisible par

x^2+px+q , si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient entier, on aura

$$F(x) - (M_0x + N_0)f_1(x) = (x^2 + px + q)\varphi(x),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}f_1(x)}.$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}f_1(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{\psi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2}f_2(x)},$$

et ainsi de suite.

Exemples :

213. Décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 5}{x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{x^3 + 5}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

On a deux racines réelles 0 et -1 et deux racines imaginaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Si l'on ne veut pas de quantités imaginaires dans le développement, on écrira

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Pour calculer les numérateurs, on emploiera de préférence dans ce cas la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on multiplie par $f(x)$, l'égalité précédente devient

$$x^3 + 5 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1).$$

Si l'on y fait successivement $x = 0$ et $x = -1$, on trouve

$$A = 5, \quad B = -2.$$

Il reste à déterminer les deux constantes C et D qui correspondent aux racines imaginaires. On égalera les coefficients de x^2 et de x dans les deux membres de l'égalité, ce qui donne les relations

$$1 = A + B + C,$$

$$0 = A + C + D;$$

d'où l'on déduit

$$C = -2, \quad D = -3.$$

Ainsi

$$\frac{x^2 + 5}{x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

214. Décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

On a une racine simple 0 et deux racines imaginaires conjuguées doubles $\pm\sqrt{-1}$. La fraction se décomposera donc sous la forme suivante

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{B'x+C'}{x^2+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a l'égalité

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (B'x+C')x(x^2+1).$$

Faisant $x=0$, il vient $A=1$. Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x , on obtient les relations

$$A+B'=0, \quad C'=0, \quad 2A+B+B'=0, \quad C+C'=0;$$

d'où l'on déduit

$$B' = -1, \quad C' = 0, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

APPENDICE.

*Résolution de deux équations du second degré à deux inconnues *.*

215. Soient

$$(1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$(2) \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0,$$

deux équations du second degré à deux inconnues. Si après avoir multiplié la première par c' , la seconde par c , on les retranche l'une de l'autre, les termes en y^2 disparaissent, et l'on a une équation du premier degré en y , d'où l'on déduit une valeur de la forme

$$y = mx^2 + nx + p,$$

qui substituée dans l'une des deux équations proposées, conduit à une équation du quatrième degré en x . A chacune des valeurs de x correspond une valeur de y ; ainsi les deux équations proposées admettent en général quatre systèmes de solutions.

(*) Cette question fait partie du programme de géométrie analytique.

Mais on peut ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré. En effet, si l'on ajoute les deux équations, après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire λ , on obtient une troisième équation

$$(3) \quad (a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')xy + (c + \lambda c')y^2 + (d + \lambda d')x + (e + \lambda e')y + (f + \lambda f') = 0,$$

qui peut remplacer l'une des deux équations proposées (I^{re} partie de l'algèbre, n° 97). Or on peut disposer de l'indéterminée λ de manière que cette nouvelle équation se décompose en deux équations du premier degré.

Représentons pour abréger l'équation (3) par

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

et, après l'avoir ordonnée de cette manière,

$$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0,$$

résolvons-la par rapport à y . Il vient

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + E^2 - 4CF}.$$

Le polynôme placé sous le radical sera un carré parfait si la condition

$$(4) \quad (BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF) = 0$$

est remplie. Mais alors l'équation résolue devient

$$(5) \quad y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \left(x + \frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC} \right)$$

et se décompose, comme on voit, en deux équations du premier degré. On substituera l'une de ces deux valeurs de y dans l'une des équations proposées, par exemple dans l'équation (1), ce qui donnera une équation du second de-

gré à une seule inconnue x ; on en déduira deux valeurs de x , et par suite deux valeurs correspondantes de y . On substituera de même l'autre valeur de y , ce qui donnera une nouvelle équation du second degré en x , d'où l'on déduira deux autres solutions. On aura ainsi les quatre solutions des deux équations proposées.

La relation (4), simplifiée et divisée par C , s'écrit

$$(6) \quad AE^2 + CD^2 - BDE + (B^2 - 4AC)F = 0;$$

si l'on remplace les lettres $A, B, \dots$ par leurs valeurs $a + \lambda a', b + \lambda b', \dots$, on arrive à une équation du troisième degré en λ . Il suffira de calculer l'une des racines de cette équation avec une certaine approximation.

On pourrait aussi calculer deux des racines de l'équation en λ . Substituant chacune d'elles dans l'équation (5), on aurait deux groupes d'équations du premier degré à deux inconnues que l'on combinerait deux à deux; ces quatre combinaisons donneraient les quatre solutions des équations proposées.

216. La question algébrique que nous venons de traiter revient à la recherche des points d'intersection des deux courbes du second degré représentées par les équations (1) et (2). Quant on a déterminé λ , comme nous l'avons dit, l'équation (5) représente deux sécantes communes aux deux courbes. Il y a plusieurs cas à considérer : 1° Si l'équation du troisième degré en λ a ses trois racines réelles, et si pour deux de ces racines la quantité $B^2 - 4AC$ est positive, ces deux racines donneront deux couples d'équations du premier degré à coefficients réels, d'où l'on déduira quatre solutions réelles; les deux courbes du second degré se coupent en quatre points et admettent en effet trois couples de sécantes réelles communes.

2° Si l'équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle et si cette racine rend positive la quantité $B^2 - 4AC$, les deux courbes du second degré admettent une couple de sécantes réelles communes ; dans ce cas, elles se coupent en deux points ou ne se rencontrent pas ; les deux équations proposées auront, ou deux solutions réelles et deux imaginaires, ou quatre solutions imaginaires.

Exemples.

1° Soient les deux équations

$$x^2 + y^2 - 10 = 0,$$

$$xy - y - 1 = 0.$$

L'équation du troisième degré

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 - 4\lambda - 40 = 0,$$

à laquelle on arrive à ses trois racines réelles et comprises, l'une entre 2 et 3, l'autre entre -2 et -3, la troisième entre -8 et -9 ; d'ailleurs la quantité $B^2 - 4AC = \lambda^2 - 4$ est ici positive pour chacune d'elles. Donc les équations proposées admettent quatre solutions réelles que l'on calculera par l'un des deux procédés indiqués.

2° On résoudra les deux équations

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

$$2xy - 1 = 0,$$

à l'aide de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0,$$

qui n'a qu'une racine réelle ; cette racine est positive. La quantité

$$B^2 - 4AC = 4(\lambda^2 - 1) = \frac{4}{\lambda}$$

étant positive, les deux équations du premier degré

$y = \left(-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x \pm \sqrt{\lambda}$, qui correspondent à cette racine réelle, ont leurs coefficients réels, et les deux courbes admettent deux sécantes communes réelles. En substituant ces deux valeurs de y dans la seconde des équations proposées, on obtient deux équations du second degré

$$\left(-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x^2 \pm \sqrt{\lambda}x - \frac{1}{2} = 0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3} < \pm 2$. Cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle l'est, au contraire, si l'on prend le signe supérieur; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda < \sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue ce nombre $\sqrt[3]{4}$ dans l'équation en λ , on a un résultat $3 - \sqrt[3]{4}$ évidemment positif, ce qui prouve que la valeur de λ est plus petite que $\sqrt[3]{4}$. Il résulte de là que les deux équations proposées ont deux solutions réelles et deux imaginaires.

Des deux sécantes communes réelles, une seule rencontre les courbes; l'autre ne les rencontre pas.

3° La résolution des deux équations

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 2x &= 0, \\ xy - 4 &= 0, \end{aligned}$$

est ramenée à celle de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - 4\lambda - 1 = 0$$

qui a ses trois racines réelles, une positive et deux négatives. La première seule rend positive la quantité

$$B^3 - 4AC = \lambda^3 - 4 = \frac{1}{\lambda},$$

et donne deux équations du premier degré à coefficients réels

$$y = \left(-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x \pm 2\sqrt{\lambda}$$

Ces valeurs de y , substituées dans la seconde des équations proposées, conduisent aux deux équations du second degré

$$\left(-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x^2 \pm 2\sqrt{\lambda}x - 4 = 0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3} < \pm 2$. Il est évident que cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle ne l'est pas non plus si l'on prend le signe supérieur; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda < \sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue cette valeur $\sqrt[3]{4}$ dans l'équation en λ , on a un résultat négatif $3 - 4\sqrt[3]{4}$, ce qui prouve que la valeur positive de λ est plus grande que $\sqrt[3]{4}$. On conclut de là que les deux équations proposées admettent quatre racines imaginaires. Des deux sécantes communes réelles, aucune ne rencontre les courbes.

4° Soient les deux équations

$$xy - y^2 - x = 0,$$

$$y^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Si, dans la seconde, on substitue la valeur

$$x = \frac{y^2}{y-1},$$

tirée de la première, on arrive immédiatement à une équation du troisième degré

$$y^3 - y + \frac{1}{2} = 0,$$

qui a une racine réelle et deux imaginaires. A la valeur réelle de y correspond une valeur réelle de x . Ainsi les deux équations proposées n'admettent que trois solutions, une réelle et deux imaginaires.

Les deux courbes représentées par les équations proposées sont des hyperboles telles qu'une asymptote de l'une

est parallèle à une asymptote de l'autre ; ce qui indique que l'un des points d'intersection s'est éloigné à l'infini.

217. Dans certains cas, la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues se ramène à une équation du second degré ou à une équation bicarrée.

Si les deux courbes sont semblables et semblablement placées, ce qui a lieu lorsque les coefficients des termes du second degré dans les deux équations sont proportionnels, on peut éliminer tous les termes du second degré en retranchant l'une des équations de l'autre, après l'avoir multipliée par un facteur convenable. On remplace ainsi l'une des équations proposées par une équation du premier degré ; l'élimination de y donne une équation du second degré en x .

Lorsqu'un même diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles dans les deux courbes, si, par une transformation de coordonnées, on rapporte les courbes à ce diamètre commun pris pour axe des x et à une parallèle aux cordes pour axe des y , les deux équations ne contiendront plus l'inconnue y qu'à la seconde puissance ; l'élimination de y^2 donnera une équation du second degré en x .

Si ces deux courbes sont des hyperboles ayant une asymptote commune, en les rapportant à cette asymptote prise pour axe des x et à une droite quelconque pour axe des y , on a des équations dans lesquelles le terme en xy contient seul la lettre x ; en éliminant ce terme, on obtient une équation du second degré en y .

Lorsque les deux courbes ont même centre, si on les rapporte à ce centre commun pris pour origine des coordonnées, les deux équations ne contenant plus de termes du premier degré, l'élimination de y donnera une équation bicarrée en x .

Si les deux courbes ont un foyer commun et qu'on le prenne pour origine, les deux équations se mettront sous la forme

$$x^2 + y^2 = (ax + by + c)^2,$$

$$x^2 + y^2 = (a'x + by' + c')^2.$$

On en déduit

$$ax + by + c = \pm (a'x + b'y + c'),$$

ou

$$(a \pm a')x + (b \pm b')y + c \pm c' = 0.$$

On a ainsi deux équations du premier degré que l'on combinera avec l'une des équations proposées.

218. La méthode que nous venons d'exposer permet de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

à celle d'une équation du troisième degré. Si l'on pose en effet

$$y = x^2,$$

l'équation s'écrit

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0,$$

et l'on a à résoudre deux équations du second degré à deux inconnues, question qui se ramène, comme nous l'avons vu, à la résolution d'une équation du troisième degré en λ .

FIN.

666628



BN VAI 15 18320





